

Problemlöseprozesse

Eine explorative Fallstudie in mediengestützter Geometrie



Masterarbeit an der Pädagogischen Hochschule Zürich
Abteilung Sekundarstufe I

vorgelegt von
Jany, Fabian
Mettler, Sandra

eingereicht bei
René Schelldorfer
Dr. Björn Maurer

Zürich, Dezember 2016

VORWORT

Beinahe ein Jahr ist es her, seit wir das Projekt Masterarbeit in Angriff genommen haben. Sie bildet den Abschluss unseres Studiums an der Pädagogischen Hochschule Zürich zur Lehrperson der Sekundarstufe I. Sie darf aber keinesfalls als isolierten Bestandteil der Ausbildung betrachtet werden. Sie ermöglichte uns nämlich unzählige einzelne Mosaiksteinchen, die in den Modulen über die neun Semester Studium verteilt erworben wurden, zu einem Ganzen zu vereinen. Somit bedeutete das Verfassen dieser Arbeit nicht nur, sich die letzten Credits zu verdienen, sondern viel mehr das erworbene Wissen zu vernetzen und punktuell zu vertiefen. Das Verfassen der Arbeit war aber mehr als eine lästige Pflicht, sondern liess aufs Neue eine Vorfreude auf unsere bevorstehende unterrichtliche Tätigkeit aufkommen.

Noch bevor die Themen von den Dozierenden ausgeschrieben wurden, war für uns beide klar, dass wir gerne eine Arbeit mit Bezug zur Mathematikdidaktik verfassen würden. Durch die Tatsache, dass wir uns beide für das gleiche ausgeschriebene Projekt interessierten und dieses auch als Partnerarbeit gekennzeichnet war, mussten wir nicht lange überlegen und schrieben uns als Tandem ein. Da wir während dem Studium schon einige gelungene Leistungsnachweise zusammen verfassten, zweifelten wir nicht an einer erfolgreichen Zusammenarbeit. In keiner Phase des Entstehungsprozesses der Masterarbeit bereuten wir es, eine Partnerarbeit zu schreiben. Die manchmal durchaus hitzigen, aber stets fachlichen Diskussionen trugen zu einer Qualitätssteigerung bei und halfen uns, gegenseitig neue Sichtweisen einzunehmen und uns auch immer wieder kritisch zu hinterfragen. Wir erwiesen uns aber nicht nur als *critical friends* wertvolle Dienste, sondern spornten uns gegenseitig an und motivierten uns in Zeiten, in welchen es schleppend voranging. Dass wir uns in jeder Phase der Arbeit stets auf den anderen verlassen konnten, trug massgeblich zum erfolgreichen und pünktlichen Vollenden dieser Meisterarbeit bei.

An dieser Stelle möchten wir uns herzlich bei unseren beiden betreuenden Dozenten, René Schelldorfer und Dr. Björn Maurer, bedanken. Ihr grosses Engagement und das spürbare Interesse an der Thematik der Arbeit, aber auch an der Begleitung während des ganzen Prozesses erachten wir nicht als selbstverständlich. Ihre durchdachten fachlichen und methodischen Hinweise trugen massgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Ebenso möchten wir uns bei den Lehrpersonen und den an der Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schülern der Sekundarschule Hinwil bedanken, die uns die wertvollen Einblicke in Problembearbeitungsprozesse erst ermöglichten.

Bei Janine Jany und Mario Clavadetscher bedanken wir uns herzlich für das Lektorat der Arbeit und die moralische Unterstützung während dem Schreibprozess.

Zürich, im Dezember 2016

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT	1
1 EINLEITUNG.....	2
1.1 Erkenntnisinteresse	2
1.2 Bezug zum Kompetenzstrukturmodell	2
1.3 Übersicht über die Arbeit	3
I. THEORIE	4
2 PROBLEMLÖSEN IN DER MATHEMATIK	5
2.1 Begriff: Ein Problem im Mathematikunterricht	5
2.2 Problemlösen nach Pólya	6
2.3 Problemlösen lernen - Heurismen.....	7
2.3.1 Allgemeine heuristische Hilfsmittel	7
2.3.2 Allgemeine heuristische Strategien und Prinzipien	7
2.3.3 Inhaltsspezifische Heurismen in der Geometrie.....	9
2.4 Problemlösen in der Schule	10
3 DAS PHASENMODELL VON BENJAMIN ROTT	11
3.1 Modelle von Problembearbeitungsprozessen	11
3.1.1 „Etablierte“ Phasenmodelle von Problembearbeitungsprozessen	11
3.1.2 Linearität und Nicht-Linearität des Problembearbeitungsprozesses	12
3.1.3 Ausgewählte Phasenmodelle aus der Mathematikdidaktik im Vergleich	12
3.2 Phasenmodell nach Rott.....	14
4 COMPUTER IM GEOMETRIEUNTERRICHT - DYNAMISCHE GEOMETRIE	17
4.1 Forschungsstand.....	17
4.2 Systeme für den computergestützten Mathematikunterricht	17
4.3 Dynamische Geometriesoftware.....	18
4.4 Vorteile dynamischer Geometriesoftware	18
4.5 Dynamische GeoGebra-Applets	19
4.6 Einsatz von DGS-Applets auf der Sekundarstufe I.....	19
4.6.1 DGS im Lehrplan 21	20
II. METHODE	21
5 FRAGESTELLUNG UND KONKRETISIERUNG.....	22
5.1 Fragen zum Prozess des Problemlösens.....	22
5.2 Fragen zum Einsatz dynamischer Geometriesysteme	22
6 SAMPLING – AUSWAHL DER PROBANDEN.....	23
7 STOFFDIDAKTISCHE AUFGABENANALYSE.....	24
7.1 Aufgabe 1: Das drehende Quadrat	24
7.1.1 Beschreibung der Aufgabe	24
7.1.2 Abweichung zur Aufgabe von Rott.....	25
7.1.3 Didaktischer Kommentar.....	26
7.1.4 Möglicher Nutzen der dynamischen Geometrie bei der Problembearbeitung	28
7.1.5 Lösungswege.....	28
7.1.6 Vorgehensweisen	31
7.1.7 Bewertung.....	32
7.2 Aufgabe 2: Vierecke aus zwei Dreiecken.....	33

7.2.1	Beschreibung der Aufgabe	33
7.2.2	Didaktischer Kommentar.....	34
7.2.3	Möglicher Nutzen der dynamischen Geometrie bei der Problembearbeitung	36
7.2.4	Lösungswege.....	37
7.2.5	Vorgehensweisen	37
7.2.6	Bewertung.....	38
8	BESCHREIBUNG DES SETTINGS / METHODENWAHL.....	40
8.1	<i>Versuchsaufbau</i>	40
8.2	<i>Videografie</i>	40
9	DATENLAGE.....	42
9.1	<i>Synchronisierte Videos aus drei Perspektiven</i>	42
9.2	<i>Dokumentationsblätter und Präsentation der Ergebnisse der Probanden</i>	42
10	DATENAUSWERTUNG	43
10.1	<i>Auswahl</i>	43
10.2	<i>Auswertung der Videos</i>	43
10.2.1	Zuordnung zum Phasenmodell	43
10.2.2	Auswertung der dynamischen Geometrie	43
10.2.3	SWITCHcast	43
10.3	<i>Auswertung der Begleitmaterialien</i>	44
10.4	<i>Fallbezogene Darstellung der Ergebnisse</i>	45
III.	ERGEBNISSE	46
11	IDENTIFIKATION DER PHASEN IN DEN PROBLEMBEARBEITUNGSPROZESSEN	47
11.1	<i>Aufgabe 1: Das drehende Quadrat</i>	47
11.1.1	Beschreibung der Problembearbeitungsprozesse	47
11.1.2	Vergleich der Problembearbeitungsprozesse	58
11.2	<i>Aufgabe 2: Vierecke aus zwei Dreiecken</i>	60
11.2.1	Beschreibung der Problembearbeitungsprozesse	60
11.2.2	Vergleich der Problembearbeitungsprozesse	77
11.3	<i>Zusammenfassung über beide Aufgaben</i>	79
12	BEWERTUNG DER BEARBEITUNGSPROZESSE	81
12.1	<i>Aufgabe 1</i>	81
12.1.1	Tandem 1.....	81
12.1.2	Tandem 4.....	81
12.1.3	Tandem 5.....	82
12.1.4	Vergleich der einzelnen Bewertungen von Aufgabe 1	82
12.2	<i>Aufgabe 2</i>	82
12.2.1	Tandem 1.....	83
12.2.2	Tandem 4.....	83
12.2.3	Tandem 5.....	83
12.2.4	Vergleich der einzelnen Bewertungen von Aufgabe 2	84
13	EINSATZ DYNAMISCHER GEOMETRIE	85
13.1	<i>Identifikation unterschiedlicher dynamischer Tätigkeiten</i>	85
13.1.1	Erkenntnisgewinnung.....	85
13.1.2	Darstellung und gegenseitiges Erklären	89
13.1.3	Zusammenfassung	90
13.2	<i>Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen</i>	90
13.2.1	Aufgabe 1	90

13.2.2	Aufgabe 2	91
13.2.3	Einfluss auf das Phasenmodell.....	92
IV.	DISKUSSION	93
14	PHASENMODELL	94
14.1	Prozessverläufe.....	94
14.1.1	Reihenfolge und Anzahl der Phasen	94
14.1.2	Vergleich der beiden Aufgaben.....	96
14.2	Erläuterungen zu einzelnen Phasen	96
14.2.1	Analyse.....	96
14.2.2	Exploration.....	96
14.2.3	Planung / Ausführung	97
14.2.4	Verifikation	97
14.2.5	Schreiben.....	98
14.3	Fazit	98
15	DYNAMISCHE GEOMETRIE	100
15.1	Nutzung des DGS.....	100
15.1.1	Entdeckendes Variieren.....	100
15.1.2	Spezialfälle	100
15.1.3	Invarianten	101
15.1.4	Darstellung und gegenseitiges Erklären	101
15.2	Applet Gestaltung	102
16	GEMEINSAME BETRACHTUNGEN VON MODELL UND DYNAMISCHER GEOMETRIE	103
17	METHODENREFLEXION	104
18	FAZIT UND AUSBLICK.....	106
18.1	Erkenntnisse für den eigenen Mathematikunterricht	106
18.2	Anknüpfungspunkte für nachfolgende Untersuchungen.....	107
ANHANG A		IX
	Aufgabe 1, Tandem 1.....	IX
	Aufgabe 1, Tandem 4.....	XIII
	Aufgabe 1, Tandem 5.....	XVII
	Aufgabe 2, Tandem 1.....	XX
	Aufgabe 2, Tandem 4.....	XXVI
	Aufgabe 2, Tandem 5.....	XXX
ANHANG B		XXXV
	Aufgabe 1, Tandem 1.....	XXXV
	Aufgabe 1, Tandem 4.....	XXXVII
	Aufgabe 1, Tandem 5.....	XXXVIII
	Aufgabe 2, Tandem 1.....	XXXIX
	Aufgabe 2, Tandem 4.....	XLII
	Aufgabe 2, Tandem 5.....	XLIV
ANHANG C		XLVI
	Codiermanual: Phasenmodell.....	XLVI
	Codiermanual: Einteilung der dynamischen Geometrie	LII
ANHANG D		LIV
	Checkliste Videoaufnahmen.....	LIV

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Titelbild: Tandem 5 bei der Bearbeitung der Aufgabe 2.....	I
Abb. 1: Allgemeine Heurismen nach Bruder u. Collet (2011, 45)	8
Abb. 2: Inhaltsspezifische Heurismen nach Wittmann (2014, 94f.).....	9
Abb. 3: Ausgewählte Phasenmodelle der Mathematikdidaktik	12
Abb. 4: Deskriptives Phasenmodell von Rott	15
Abb. 5: Aufgabenstellung der Aufgabe 1: „Das drehende Quadrat“	24
Abb. 6: Applet zur Aufgabe 1.....	24
Abb. 7: Auszug aus dem Dokumentationsblatt zur Aufgabe 1	25
Abb. 8: Begründung der Aufgabe 1: mögliche Schülerlösung	29
Abb. 9: Begründung der Aufgabe 1 über kongruente Dreiecke	29
Abb. 10: Begründung der Aufgabe 1 über kongruente Vierecke	30
Abb. 11: Aufgabenstellung der Aufgabe 2: „Vierecke aus zwei Dreiecken“	33
Abb. 12: Applet zur Aufgabe 2.....	33
Abb. 13: Mögliche Vierecksformen zur Aufgabe 2	37
Abb. 14: Aufnahmesetting	41
Abb. 15: Synchronisierte Videos	42
Abb. 16: Programmoberfläche von SWITCHcast mit Codierbaum	44
Abb. 17: A1, T1: Spezialfall „Quadrat“	48
Abb. 18: A1, T1: links Spezialfall „Dreieck“, rechts Einzelfall	48
Abb. 19: A1, T1: Einzelfall	49
Abb. 20: A1, T1: schriftliche Dokumentation eines Einzelfalls	49
Abb. 21: A1, T1: Skizze zum Einzelfall.....	49
Abb. 22: A1, T1: schriftliche Dokumentation eines Einzelfalls	50
Abb. 23: A1, T4: Spezialfall „Dreieck“	51
Abb. 24: A1, T4: Dokumentation der Erkenntnis	52
Abb. 25: A1, T4: links Spezialfall „Quadrat“, rechts Spezialfall „Dreieck“	53
Abb. 26: A1, T4: Skizze Spezialfall „Quadrat“	53
Abb. 27: A1, T4: Mögliche Formen der überdeckten Flächen.....	54
Abb. 28: A1, T5: Einzelfall	56
Abb. 29: A1, T5: (fehlerhafte) Skizze der Probanden zur Illustration ihrer Erkenntnisse.....	56
Abb. 30: A1, T5 schriftliche Dokumentation	56
Abb. 31: A1, T5: schriftliche Dokumentation	57
Abb. 32: A1, T1: Prozessverlauf.....	58
Abb. 33: A1, T4: Prozessverlauf.....	58
Abb. 34: A1, T5: Prozessverlauf.....	58
Abb. 35: A1, T1: zeitlicher Verlauf	59
Abb. 36: A1, T4: zeitlicher Verlauf	59
Abb. 37: A1, T5: zeitlicher Verlauf	60

Abb. 38: A2, T1: Standbilder bei der Erzeugung des Quadrates	61
Abb. 39: A2, T1: Links der Rhombus von M., rechts der Rhombus von J.	61
Abb. 40: A2, T1: Dokumentation des Rhombus	62
Abb. 41: A2, T1: Figuren beim Versuch, das Rechteck zu erstellen	62
Abb. 42: A2, T1: Screenshot vom „schönen“ Drachenviereck	63
Abb. 43: A2, T1: links Proband J. und rechts Proband M.	64
Abb. 44: A2, T1: links Hoffnung auf das Rechteck, rechts Erkenntnis, dass es nicht funktioniert	64
Abb. 45: A2, T1: Standbild beim Versuch, ein Rechteck zu erstellen	65
Abb. 46: A2, T1: allgemeine Begründung der Erkenntnisse	66
Abb. 47: A2, T4: Dokumentation zur Erzeugung des Quadrates	67
Abb. 48: A2, T4: Screenshots vom Quadrat zum Rhombus zum Drachenviereck	67
Abb. 49: A2, T4: Dokumentation zur Erzeugung des Rhombus	68
Abb. 50: A2, T4: Dokumentation zum Drachenviereck, Screenshot aus den Videoaufnahmen.....	69
Abb. 51: A2, T4: Erzeugung von zwei Drachenvierecken	69
Abb. 52: A2, T4: links kopfstehender Drachen, mittig „schöner“ Drachen, rechts kein Drachen	70
Abb. 53: A2, T4: Formulierung einer allgemeinen Erkenntnis.....	70
Abb. 54: A2, T5: Chronologische Abfolge bei der Bildung des Quadrates	71
Abb. 55: A2, T5: Versuch, das Trapez zu erstellen	73
Abb. 56: A2, T5: Beginn des Versuchs, ein Rechteck zu erzeugen.....	73
Abb. 57: A2, T5: Entdeckung des Rhombus beim Versuch, ein Rechteck zu erzeugen	73
Abb. 58: A2, T5: Auszug aus der Dokumentation zum Quadrat	75
Abb. 59: A2, T5: Auszug aus der Dokumentation zum Drachen.....	75
Abb. 60: A2, T5: beliebiges Dreieck an der Spiegelachse	75
Abb. 61: A2, T1: Prozessverlauf.....	77
Abb. 62: A2, T4: Prozessverlauf.....	77
Abb. 63: A2, T5: Prozessverlauf.....	77
Abb. 64: A2, T1: zeitlicher Verlauf	78
Abb. 65: A2, T4: zeitlicher Verlauf	78
Abb. 66: A2, T5: zeitlicher Verlauf	79
Abb. 67: A2, T5: planvolles Verändern am Quadrat.....	86
Abb. 68: A2, T1: Planvolles Verändern am Quadrat	87
Abb. 69: A1, T1: synchronisierte Videos	87
Abb. 70: A1, T4: Betrachtung von Spezialfällen	88
Abb. 71: A2, T4: Untersuchung nach Invarianten	88
Abb. 72: A1, T5: synchronisierte Videos	89
Abb. 73: A2, T5: Bildschirmaufnahmen beim <i>gegenseitigen Erklären</i>	90
Abb. 74: A2, T5: Prozessverlauf.....	95

TABELLENVERZEICHNIS

Tab. 1: „Vier-Phasen-Modell“ nach Pólya	7
Tab. 2: Vergleich von drei ausgewählten Phasenmodellen	13
Tab. 3: Auszug aus dem Lehrplan (D-EDK 2016, 23).....	20
Tab. 4: Aufgabenbeschriebe von Rott zur Bierdeckelaufgabe	25
Tab. 5: Formale Begründung zur Aufgabe 1	30
Tab. 6: Begründung über kongruente Vierecke	30
Tab. 7: A1, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen	91
Tab. 8: A1, T4: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen	91
Tab. 9: A1, T5: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen	91
Tab. 10: A2, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen	92
Tab. 11: A2, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen	92
Tab. 12: A2, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen	92

ABSTRACT

In dieser Masterarbeit wird untersucht, wie Problembearbeitungsprozesse auf der Sekundarstufe I in der Geometrie ablaufen, die mit Hilfe dynamischer Geometriesysteme bearbeitet werden. Das Problemlösen nimmt innerhalb der Mathematik eine zentrale Rolle ein. Aufgrund der Bedeutung für die Mathematik und aus lernpsychologischen Gründen ist das Problemlösen ein wichtiges Thema innerhalb der Mathematikdidaktik. Zur Erfassung von Problemlöseprozessen wurden schon verschiedene Phasenmodelle entwickelt; Grundlage dieser explorativen, videobasierten Fallstudie ist das deskriptive Phasenmodell von Rott (2013), welches er unter anderem aus den Modellen von Pólya (1945) und Schoenfeld (1985) entwickelt hat. Dieses Phasenmodell sieht explizit Rückschritte zwischen den Phasen vor. Ein weiterer Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist der zunehmende Einsatz mediengestützter dynamischer Geometriesysteme wie GeoGebra im Mathematikunterricht. Für die qualitative Untersuchung bearbeiteten Lernende der Sekundarstufe I in Partnerarbeit Aufgaben mit Hilfe von GeoGebra Applets. Die Auswertung der erhobenen Videodaten bestätigen das deskriptive Phasenmodell von Rott (2013). Bei den Problembearbeitungsprozessen zeigten sich immer wieder Rückschritte zwischen den einzelnen Phasen. Bezüglich der dynamischen Geometrie liessen sich zwei Nutzungsarten feststellen: Nutzung zur Erkenntnisgewinnung und zur Darstellung und gegenseitigen Erklärung. Die Daten lassen vermuten, dass der Einsatz von Applets beim Problemlösen in der Geometrie einen Mehrwert erzeugen kann und den Bearbeitungsprozess unterstützt.

Schlüsselwörter: Mathematikdidaktik, Phasenmodell, Problembearbeitungsprozesse, dynamische Geometriesysteme, GeoGebra, Applet

1 EINLEITUNG

Beinahe täglich begegnet man dem Begriff „Problem“ im Alltag. Darunter versteht man Anforderungen und oft auch eine vermeintliche Überforderung in einer bestimmten Lebenssituation, die ein Problem darstellt und nach einer Lösung verlangt. Dieser hohen Alltagsrelevanz des Problemlösens ist es geschuldet, weshalb diese Thematik ein wichtiger Forschungsgegenstand der Psychologie darstellt und sich auch die Neurologie innerhalb des Fachbereichs der Medizin der Thematik annimmt. Insbesondere die Mathematik und die Mathematikdidaktik befasst sich intensiv mit dem Problemlösen (vgl. Rott 2013, 5). Die Bedeutung des Problemlösens ist in der Mathematik unbestritten. Leuders (2003, 121) beschreibt das Finden und Lösen von Problemen als Kern des eigentlichen Mathematik Betreibens. Das Problemlösen in der Mathematik ist nicht nur innerhalb des Fachbereichs an sich von Bedeutung, sondern fördert und fordert auch eine allgemeine Problemlösekompetenz (D-EDK 2016, 2). Dadurch, dass der Lehrplan 21 kompetenzorientiert ist und auf der konstruktivistischen Lerntheorie gründet, wird ein verstärkter Fokus auf das Behandeln von Problemen im Mathematikunterricht legitimiert. Die Kompetenzdefinition, die dem Lehrplan zugrunde liegt, ist durch Weinert (2001, 27) geprägt. Das Aneignen von Kompetenzen hat demnach das Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler lernen Probleme zu lösen und mit ihnen in „variablen Situationen“ umzugehen.

Im Rahmen dieser Forschungsarbeit gehen wir der Frage nach, wie solch ein Problembearbeitungsprozess bei Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I abläuft und ob er in das von Benjamin Rott (2013) entwickelte deskriptive Phasenmodell eingeordnet werden kann.

1.1 Erkenntnisinteresse

Wir interessieren uns für den Problembearbeitungsprozess als ganzes. Die Lösung des Problems ist durchaus auch von Interesse, stellt aber einfach einen Teil des Bearbeitungsprozesses dar. Ein primäres Ziel von uns ist zu untersuchen und zu beschreiben, wie ein solcher Prozess abläuft. Da diese Prozessabläufe in ein deskriptives Phasenmodell eingeordnet werden, sind die Erkenntnisse für uns als angehende Sekundarlehrpersonen von besonderem Interesse. Sie können den einen oder anderen Anknüpfungspunkt bieten für unserer Lehrtätigkeit. Dadurch, dass die Aufgaben mediengestützt bearbeitet werden, bekommt die Untersuchung eine zusätzliche Bedeutsamkeit und einen Aktualitätsbezug. Darum interessiert uns neben dem Phasenmodell auch die mediale Komponente der Bearbeitung und wie diese von den Schülerinnen und Schülern genutzt wird.

1.2 Bezug zum Kompetenzstrukturmodell

Im Kompetenzstrukturmodell der Pädagogischen Hochschule Zürich (Kompetenzstrukturmodell PHZH 2015) ist in zwölf Standards festgelegt, welche Kompetenzen eine Lehrperson am Ende der Ausbildung sich angeeignet haben soll. Die Thematik der Problembearbeitungsprozesse in der Mathematik lässt sich dem Standard 1 zuordnen.

„Die Lehrperson verfügt über Fachwissen, versteht die zentralen Konzepte, Forschungsinstrumente und Strukturen ihrer Disziplinen. Sie kennt die aktuellen allgemein- und fach-

didaktischen Schwerpunkte und kann daraus Konsequenzen für ihren Unterricht ziehen.“
(ebd. PHZH, 2015)

Mit dieser Arbeit möchten wir uns forschungsmethodisches Wissen aneignen und dieses anwenden. Da das Problemlösen ein gewichtiges Thema in der Mathematikdidaktik darstellt, erhoffen wir uns eine Vertiefung des aktuellen Diskurses und Anregungen für unsere unterrichtliche Tätigkeit.

1.3 Übersicht über die Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in vier Teile. Im Theorieteil geben wir einen Überblick über das Problemlösen in der Mathematikdidaktik und legen das Phasenmodell von Rott dar. Des Weiteren umreißen wir Forschungsstand und Einsatzmöglichkeiten dynamischer Geometriesysteme im Mathematikunterricht und gehen vertieft auf die Verwendung von Applets ein. Im anschliessenden Methodenteil folgen Erläuterungen zur Datenerhebung und zur Auswertung unserer explorativen, videobasierten Fallstudie. Die Ergebnisse werden nach unseren zwei Schwerpunkten, dem Phasenmodell von Rott (2013) und dem Aspekt der dynamischen Geometrie, ausgewertet. Der Diskussionsteil schliesst die Arbeit ab, indem wir die Ergebnisse nochmals in Beziehung zur Theorie setzen, Schlüsse für die eigene Unterrichtspraxis ziehen und weitere Forschungsfragen ins Feld führen.

I. Theorie

2 PROBLEMLÖSEN IN DER MATHEMATIK

In diesem Kapitel leuchten wir mit Hilfe mathematikdidaktischer Literatur die Begrifflichkeit des Problems aus, gehen auf das Problemlösen nach Pólya ein und beschreiben die Heurismen. Das Kapitel schliesst mit einer Verortung des Problemlösens im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I.

2.1 Begriff: Ein Problem im Mathematikunterricht

Im Alltagsgebrauch ist „Problem“ ein weitläufiger Begriff. Ein Problem ist „jede Situation, in der man versucht, ein Ziel zu erreichen, und dafür Hindernisse überwinden muss“ (Woolfolk 2008, 361). Für ein Problem liegt kein offensichtlicher Lösungsweg vor; es beinhaltet einen Ausgangszustand, der in einen Zielzustand überführt werden soll. Dabei müssen (personenspezifische) Schwierigkeiten überwunden werden (Heinrich, Bruder u. Bauer 2015, 280).

Ein Problem im Mathematikunterricht beschreiben Bruder und Collet (2011, 11) als eine „Anforderungssituation“, die subjektiv als kognitiv herausfordernd erlebt wird. Das „Nichtkennen“ der Lösung macht ein Problem aus - es ist keine offensichtliche Lösung vorhanden und es können keine expliziten, automatisierte Algorithmen angewandt werden, wie dies bei sogenannten Routineaufgaben der Fall ist (Wittmann 2014, 82). Der Problembegriff ist auf das Individuum bezogen; es handelt sich nicht um allgemeine, noch ungelöste gesellschaftliche oder mathematische Probleme (Bruder u. Collet 2011, 12). Der Problembegriff bezieht sich ausserdem auf kognitive Anforderungen und berücksichtigt keine anderen möglichen Hindernisse oder Barrieren wie die Motivation, die Konzentrationsfähigkeit oder das Interesse am Problem (ebd. 2011, 12).

Ein mathematisches Problem könnte man daraus schliessend wie folgt zusammenfassen (vgl. ebd., 2011, 11f. und Wittmann 2014, 82ff.):

Ein mathematisches Problem ist eine Aufgabe oder eine Aufforderung, die subjektiv als schwierig wahrgenommen wird, auf die spontan kein Lösungsweg gefunden werden und die Lösung nicht mit standardisierten Lösungsverfahren ermittelt werden kann.

Aus einer Aufgabe, die subjektiv ein Problem darstellt, kann jedoch auch eine Routineaufgabe werden, wenn ein neues Verfahren behandelt und automatisiert wurde (Wittmann 2014, 82).

In der Mathematik gibt es unterschiedliche Kategorien von Problemen (Wittmann 2014, 82ff.): Berechnungsprobleme, Beweisprobleme, Konstruktionsprobleme, Modellierungsprobleme, Anzahlprobleme und Optimierungsprobleme. Die Probleme können sich nach Wittmann (2014, 84) in der Komplexität und der Offenheit stark unterscheiden.

Für das Problemlösen ist mathematisches Faktenwissen zwar notwendig aber nicht hinreichend (Wittmann 2014, 84). Zum Lösen subjektiv schwieriger Aufgaben bedarf es verschiedene Methoden und Techniken - sogenannte Heurismen. (Bruder u. Collet 2011, 14, vgl. Wittmann 2014, 84). „*Heuristische Strategien [Heurismen] liefern Impulse zum Weiterdenken, sie bieten aber keine Lösungsgarantie wie ein Algorithmus*“ (Bruder 2002, 4). Bruder und Collet (2011, 15) definieren Problemlösekompetenz als Ergebnis von Lernprozessen, in denen Problemlösetechniken und -methoden implizit oder explizit angewendet werden.

2.2 Problemlösen nach Pólya

Im Bereich des Problemlösens der Mathematikdidaktik ist George Pólya wohl der meist zitierte Autor überhaupt. Er wird oft als „Urvater“ des mathematischen Problemlösens bezeichnet (vgl. Bruder u. Collet 2011). Mit seiner Arbeit legte er die Grundlage für viele *didaktische Überlegungen* und Modelle im Bereich des Problemlösens (Bruder u. Collet 2011, 18).

In seinem wohl bekanntesten Werk - „How to solve it“ - wendet er sich an Lehrpersonen und Lernende mit dem Schwerpunkt, wie sie selbst einen Problembearbeitungsprozess anregen können (vgl. Pólya 1945). Einerseits geht er dem Thema „Wie löst man Probleme“ nach, indem er eine Reihe von Fragen und Anregungen, die für die Lösung eines Problems hilfreich sein können, formuliert (ebd. 1945, 11f.). Andererseits entwarf Pólya (1945, 12) ein „kleines Wörterbuch der Heuristik“, in dem er verschiedene heuristische Strategien und Fragestellungen erläutert.

Pólya (1945) wendet sich in seinem Werk immer wieder direkt an die Lehrperson und verweist auf deren Rolle und Bedeutung im Problemlöseprozess (oder viel mehr beim *Erlernen* oder *Üben* von Problemlösen). Demnach ist auch sein viel zitiertes „Vier-Phasen-Modell“ eine Sammlung von Fragestellungen, mit welchen die Lehrperson den Problembearbeitungsprozess der Lernenden anregen kann (vgl. Pólya 1945):

Verstehen der Aufgabe

In der ersten Phase des Problemlösens geht es um das Verständnis der Aufgabenstellung und das Problemverständnis; der Wortlaut muss verstanden, gegebene und gesuchte Grössen sowie die Bedingungen klar sein (Pólya 1945, 19f.). Dazu sollen Fragen und Anregungen wie folgende hilfreich sein (ebd. 1945):

- „Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?“
- „Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend?“
- „Zeichne eine Figur [...] und trage passende Bezeichnungen ein!“

Ausdenken eines Plans

Der schwierigste Schritt bei der Lösung einer Problemaufgaben ist die Entwicklung eines passenden Plans (Pólya 1945, 22). Durch folgende Fragen und Anregungen kann dieser Schritt erleichtert werden (ebd. 1945):

- „Kennst du eine ähnliche Aufgabe?“
- „Wenn du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen.“
- „Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken?“
- „Hast du alle Daten benutzt? Hast du die ganze Bedingung benutzt?“

Ausführen des Plans

Pólya (1945, 26) weist darauf hin, dass die Ausführung eines Plans hauptsächlich Geduld benötige. Wichtig ist ausserdem, dass alle Teilschritte sauber kontrolliert werden (ebd. 1945, 27):

- „Kontrolliere jeden Schritt. Kannst du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist?“

Rückschau

Die Rückschau als letzte Phase des Problemlösens stellt eine äusserst lehrreiche dar (Pólya 1945, 28).

„Durch die Rückschau auf die vollendete Lösung, durch nochmaliges Erwägen und Überprüfen des Resultats und des Weges, der dazu führte, könnten sie [die Lernenden] ihr Wissen festigen und ihre Fähigkeit, Aufgaben zu lösen, entwickeln.“ (Pólya 1945, 28)

- *„Kannst du das Resultat überprüfen und [...] auf verschiedene Weise ableiten?“*

Tab. 1: „Vier-Phasen-Modell“ nach Pólya

2.3 Problemlösen lernen - Heurismen

Für das Lernen von Problemlösen ist das Erwerben und Anwenden von Heurismen notwendig. Heurismen sind Problemlösestrategien, -prinzipien und Hilfsmittel (vgl. Wittmann 2014, 90). Mit Hilfe dieser „Werkzeuge“ können Probleme zielgerichtet angegangen werden - es handelt sich dann nicht um ein zielloses Ausprobieren (ebd. 2014, 84).

„Heuristische Strategien liefern Impulse zum Weiterdenken, sie bieten aber keine Lösungsgarantie wie ein Algorithmus.“ (Bruder 2002, 4).

Grundsätzlich können Heurismen in *allgemeine* und *inhaltsbezogene* Strategien und Hilfsmittel unterschieden werden (vgl. Wittmann 2014, 90ff.).

2.3.1 Allgemeine heuristische Hilfsmittel

Heuristische Hilfsmittel haben keinen „Verfahrenscharakter“ wie andere Heurismen (Bruder u. Collet 2011, 45). Sie dienen zur Strukturierung, Visualisierung, Organisation und Reduktion der Informationen und können helfen, die Problemstellung besser zu verstehen (vgl. ebd. 2011, 45 und 61). Folgende, heuristische Hilfsmittel sind im Mathematikunterricht anzutreffen (ebd. 2011, 45): *Tabellen, Wissensspeicher, Lösungsgraphen, Informative Figuren und Gleichungen*. Die Gleichung dient in der Phase der Mathematisierung des Problemkontextes als heuristisches Hilfsmittel in Form einer Informationsreduktion (ebd. 2011, 76f.).

2.3.2 Allgemeine heuristische Strategien und Prinzipien

Auf die Unterscheidung zwischen heuristischen Strategien und Prinzipien wird hier verzichtet, weil dies in der Unterrichtspraxis nicht von grosser Relevanz ist. Nachfolgend wird eine Auswahl von heuristischen Strategien und Prinzipien aufgeführt (vgl. Bruder u. Collet 2011, 27-142), die beim Problemlösen in der Schule angewendet werden (siehe Abb. 1).

Systematisches Ausprobieren: Das Systematische Ausprobieren stellt einen wichtigen Heurismus beim Problemlösen dar. Wie die Bezeichnung schon andeutet, handelt es sich bei dieser Strategie nicht um ein „diffuses“ Probieren, sondern um ein systematisches Vorgehen (ebd. 2011, 70).

Vorwärtsarbeiten: Bruder und Collet (2011, 76) bezeichnen das Vorwärtsarbeiten als „Probieren mit Richtung“. Man kann sich hier die Frage stellen, was man aus den gegebenen Angaben und Grössen folgern kann (ebd. 2011, 76). Ausgehend davon folgt der Lösungsweg über Teilergebnisse Schritt für Schritt weiter zu der gesuchten Grösse (Wittmann 2014, 91).

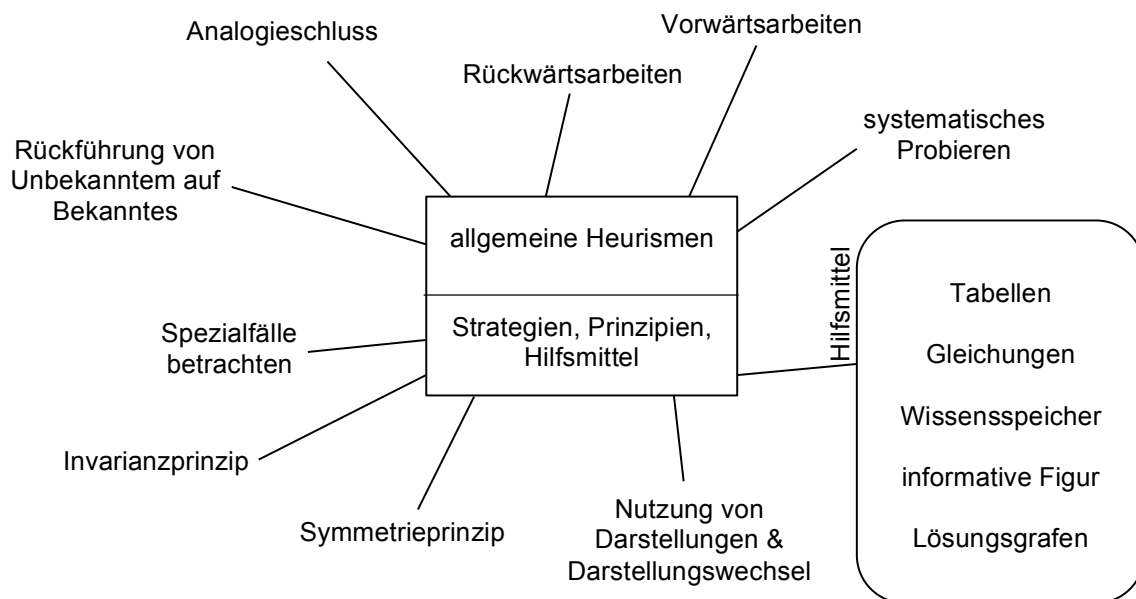


Abb. 1: Allgemeine Heuristiken nach Bruder u. Collet (2011, 45)

Rückwärtsarbeiten: Beim Rückwärtsarbeiten erfolgt der Lösungsweg vom erwünschten Ergebnis zu den Voraussetzungen (ebd. 2014, 91). Als Problemlöser stellt man sich die Frage, was die gesuchte Grösse darstellt und was man zu deren Ermittlung benötigt (vgl. Bruder u. Collet 2011, 79f.). Dieser Prozess gliedert sich in Teilschritte, aus welchen man auf die Lösung schliessen kann.

Spezialfälle betrachten: Bei der heuristischen Strategie „Spezialfälle betrachten“ wird zu Beginn des Lösungswegs ein Spezialfall bearbeitet und danach auf die Lösung des ursprünglichen Problems geschlossen (Wittman 2014, 93). Dieses strategische Vorgehen hat den enormen Vorteil, dass man Beziehungen und Eigenschaften an den Spezialfällen viel leichter ermitteln kann (ebd. 2014, 93).

Analogieschluss: Beim Analogieschluss sucht man nach ähnlichen, bekannten Problemstellungen und überprüft, ob dort angewandte Strategien auch in der vorliegenden Aufgabe funktionieren können (ebd. 2011, 83). In der Geometrie stellt das Analogisieren einen äusserst wichtigen Heurismus dar, da dieser hilfreich sein kann, spezifische heuristische Strategien (wie z.B. die Suche nach rechtwinkligen Dreiecken) auf die Aufgabe zu übertragen (Witmann 2011, 92).

Invarianzprinzip: Eine Invariante ist eine „unveränderliche Grösse“ (vgl. ebd. 2011, 92). Beim Invarianzprinzip geht es darum, diese unveränderlichen Elemente, Bezugsgrössen oder Gemeinsamkeiten in den Informationen der Aufgabenstellung zu ermitteln (Bruder u. Collet 2011, 96). Die Autorinnen (ebd. 2011, 97) beschreiben dies wie folgt: „Es geht darum, in »Unterschiedlichem das Gemeinsame zu finden«.“

Symmetrieprinzip: Beim Symmetrieprinzip stehen Symmetrien, Identitäten und Musteranalogien zwischen einzelnen Elementen der Problemstellung im Fokus (ebd. 2011, 100). Im Vergleich zum Invarianzprinzip sucht man beim Symmetrieprinzip primär gleiche *Strukturen* und nicht gleiche Grössen.

Rückführung von Unbekanntem aus Bekanntem: Bei dieser heuristischen Strategie werden Inhalte umstrukturiert, erweitert oder beschränkt und dadurch so aufbereitet, dass sie Analogieschlüsse zulassen (ebd. 2011, 84).

Nutzung von Darstellungen und Darstellungswechsel: Diese heuristische Strategie findet hauptsächlich in der Geometrie Platz. Wittmann (2014, 91) erwähnt hierzu die grosse Bedeutung von unterschiedlichen Darstellungen am Beispiel des Übergangs von einem Schrägbild zu einer Schnittzeichnung oder dem Einzeichnen von Teilfiguren.

2.3.3 Inhaltsspezifische Heurismen in der Geometrie

Inhaltsspezifische Heurismen haben einen direkten Bezug zu einem bestimmten Teilgebiet (der Geometrie) (Wittmann 2014, 94). Häufig beziehen sich solche Heurismen auf spezifische Probleme. Nachfolgend wird eine schulrelevante Auswahl von inhaltsspezifischen heuristischen Strategien aufgelistet, wie sie Wittmann beschreibt (2014, 94) (siehe Abb. 2):

- Hilfslinien einzeichnen,
- gleich lange Strecken in gegebenen Figuren suchen,
- (rechtwinklige) Teildreiecke für den Einsatz des Satzes von Pythagoras suchen,
- kongruente Dreiecke für die Bestimmung gleich langer Strecken oder gleicher Winkel suchen,
- ähnliche Dreiecke für die Bestimmung von Seitenverhältnissen suchen,
- parallele Geraden für die Anwendung von Winkelsätzen suchen,
- inhaltsgleiche Drei- und Vierecke suchen, mit dem Ziel über die Formeln der Flächeninhalte eine unbekannte Grösse zu ermitteln,
- ergänzungsgleiche oder zerlegungsgleiche Flächen suchen und konstruieren.

Inhaltsspezifische Heurismen müssen den Lernenden bewusst gemacht werden durch die Reflexion von eigenen Lösungsansätzen und dem Vergleich mit Lösungswegen anderer Lernenden (Wittmann 2014, 95f.). Dies rührt daher, da ein Bewusstsein der Heurismen aufgebaut werden muss.

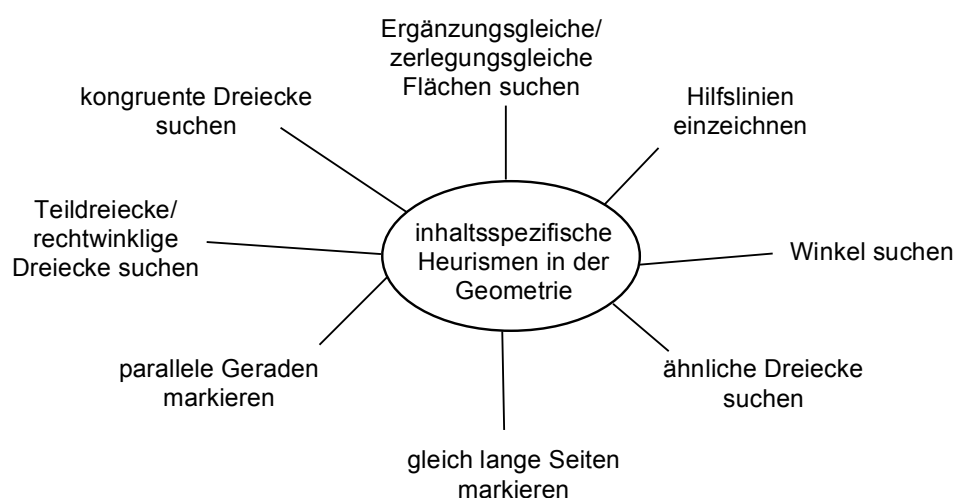


Abb. 2: Inhaltsspezifische Heurismen nach Wittmann (2014, 94f.)

2.4 Problemlösen in der Schule

Die verstärkte Thematisierung des Problemlösens steht in Verbindung mit dem heute verbreiteten Ansatz des problemorientierten Lernens im Mathematikunterricht (vgl. Leuders 2003). Wittmann (2014, 81) fasst dies folgendermassen zusammen:

„Die Schülerinnen und Schüler sollen sich mathematische Inhalte im Rahmen offener Lernumgebungen entlang geeigneter inner- oder aussermathematischer Probleme selbst erschliessen, zum Teil sogar selbst entwickeln, im Sinne einer aktiven Auseinandersetzung mit Mathematik.“

Ganz nach dieser „Leitidee“ (vgl. Wittmann 2014, 81) ist das aktuelle Zürcher Mathematiklehrmittel¹ aufgebaut. Am Anfang von neuen Unterrichtsinhalten steht oftmals eine Problemaufgabe, womit neue mathematische Inhalte problemorientiert erschlossen werden. Auch der Lehrplan 21 stützt diese konstruktivistische Auffassung von Lernen. Dies zeigt sich besonders im Handlungs- und Themenaspekt *Erforschen und Argumentieren*.

Der Fachbereichslehrplan Mathematik (D-EDK 2016, 3) nennt nochmals explizit die Bedeutung des auf Verstehen ausgerichteten Lehrens und Lernens von Mathematik durch die Problemorientierung. Dieses stärkt die Denk- und Urteilsfähigkeit der Lernenden für die Auseinandersetzung mit künftigen Problemen (ebd. 2016, 3).

Das Problemlösen im Mathematikunterricht verfolgt sowohl inner- als auch aussermathematische Ziele. Auf inhaltlicher Ebene steht das Erkennen und Formulieren mathematischer Fragestellungen (Witmann 2014, 87). Ausserdem sollen die Lernenden mathematikspezifische Heuristiken erlernen und in vielfältigen Kontexten anwenden können.

Ergänzt werden diese Ziele mit allgemeinen, überfachlichen Zielen. Die Lernenden sollen sich darin üben, eigenständig Lösungspläne zu entwickeln und durchzuführen und ihr eigenes Handeln zu beschreiben und zu reflektieren. Dabei entwickeln die Schülerinnen und Schüler Anstrengungsbereitschaft und Durchhaltevermögen (ebd. 2014, 87).

¹Keller, Franz et al. „Mathematik 1“ 2011, „Mathematik 2“ 2012, „Mathematik 3“ 2013. Lehrmittelverlag Zürich.

3 DAS PHASENMODELL VON BENJAMIN ROTT

Benjamin Rott - Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Duisburg-Essen - hat in seiner Dissertation verschiedene Phasenmodelle von Problembearbeitungsprozessen analysiert und deren Elemente für eine Beschreibung empirisch untersucht (vgl. Rott 2014, 262). Seine empirischen Daten stammen aus dem Projekt MALU (kurz für Mathe AG an der Leibniz Universität) (Rott 2013, 123). Dabei dokumentierte Rott Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlerinnen und Fünftklässlern, die in Partnerarbeit unterschiedliche Problemaufgaben bearbeitet haben (vgl. ebd. 2013, 129). Bei deren Auswertung ging Rott unter anderem den Fragen nach, inwiefern sich die verschiedenen Phasen aus den Problembearbeitungsmodellen bei den Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I identifizieren lassen und wie diese zeitlich verlaufen (ebd. 2013, 117f.).

Anhand dieser Daten hat Rott (2013) unter anderem ein eigenes Phasenmodell von Problembearbeitungsprozessen entwickelt, welches er in einer weiterführenden wissenschaftlichen Arbeit (Rott 2014) präzisiert. Dabei handelt es sich um ein empirisch gestütztes, deskriptives Modell (vgl. ebd. 2014, 253). Die Entwicklung des vorliegenden Phasenmodells ist insofern von Bedeutung, da im Bereich des Problemlösens noch sehr wenig empirisch geforscht wurde und bisher kaum Modelle existieren, die auf empirischen Daten beruhen.

3.1 Modelle von Problembearbeitungsprozessen

Es existieren im Bereich der Mathematikdidaktik mehrere Modelle, die sich in ihren Schwerpunkten jeweils unterscheiden (Philipp 2012, zit. nach Rott 2014, 253). Grundsätzlich lassen sich Modelle *innerer Struktur* von Modellen *äusserer Struktur* unterscheiden. Erstere fokussieren beim Problembearbeitungsprozess kognitive Prozesse, Heuristiken und Überzeugungen (ebd. 2014, 253). Modelle äusserer Struktur beschreiben den zeitlichen Verlauf und die Organisation von Problemlöse**bemühungen** (ebd. 2014, 254). Hierbei können die *Phasenmodelle* zwei unterschiedliche Funktionen haben: Es gibt *deskriptive Modelle*, die aus der Beschreibung und Analyse empirischer Daten entwickelt worden sind, und *normative Modelle*, die einen pädagogischen Nutzen haben und „idealisierte“ Hinweise und Vorgaben für die Bearbeitung von Problemaufgaben geben (ebd. 2014, 253). Da Modelle *innerer Struktur* kaum analysierbar sind, vertieft sich Rott auf Modelle *äusserer Struktur* (vgl. ebd. 2014, 253).

3.1.1 „Etablierte“ Phasenmodelle von Problembearbeitungsprozessen

Rott nennt zwei Phasenmodelle von Problembearbeitungsprozessen, die sich in der Psychologie etabliert haben und sich in ihrer grundlegenden Struktur unterscheiden (Neuhaus 2002, zit. nach Rott 2014, 255):

- Bei Dewey (1910/2002, zit. nach Rott 2014, 255) steht das logische Denken im Zentrum des Interessens. Er unterscheidet fünf unterschiedliche Stufen des Problembearbeitungsprozesses: 1. der Schwierigkeit begegnen, 2. das Problem lokalisieren und präzisieren, 3. Ansätze einer möglichen (Teil-) Lösung suchen, 4. Konsequenzen des Ansatzes entwickeln und 5. die gefundene Lösung überprüfen.

- Wallas (1926, zit. nach Rott 2014, 255), der sich auf die Erkenntnisse von Poincaré stützt, fokussiert in seinem Modell auch unbewusst ablaufende Phasen: Zuerst erfolgt die *bewusste Vorbereitung* - das Durchdringen des Problems, danach die Phase der *Inkubation*; in dieser Phase beschäftigen sich die Problemlösenden nur im Unterbewusstsein, währenddessen sie sich anderen Tätigkeiten widmen. Mit der *Illumination*, dem Gedankenblitz, gewinnen die Problemlösenden die entscheidende Idee zur Lösung des Problems. Die bewusste *Verifikation* schliesst den Prozess der Problembearbeitung ab.

In der Mathematikdidaktik stellt das Phasenmodell von Pólya (1945, zit. nach Rott 2014, 255) bis heute die Grundlage. Es handelt sich dabei um ein vierstufiges Phasenmodell (vgl. Abschnitt 2.2), das sich auf die *äussere Struktur* der Problembearbeitung bezieht (Rott 2014, 255). Rott (2014, 255) betont ausdrücklich, dass dieses ein *normatives Modell* darstellt, da sich Pólya an ein „spezielles Zielpublikum“ (Lehrpersonen und interessierte Lernende) wendet.

3.1.2 Linearität und Nicht-Linearität des Problembearbeitungsprozesses

Für die Deskription eines Problembearbeitungsprozesses ist die zeitliche Abfolge der Phasen bedeutend (ebd. 2014, 259). Grundsätzlich kann man zwischen einem *linearen* und einem *nicht-linearen* Prozessverlauf unterscheiden (ebd. 2014, 259). Bei einem *linearen* Modell vom Problembearbeitungsprozess laufen die Phasen ohne Rückschritte in einer vorgegebenen Reihenfolge ab, wie das beispielsweise bei der Darstellung von Pólya der Fall ist (ebd. 2014, 259). Bei nicht-linearen Modellen gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie die Phasen zeitlich ablaufen - Rückschritte sind zwischen allen oder zwischen einzelnen Phasen vorgesehen (vgl. Rott 2014, 259).

Im nächsten Abschnitt stellen wir das Modell von Pólya und weitere Phasenmodelle vom Problembearbeitungsprozess vor und vergleichen diese in Anlehnung an Rott (2014). Beim Vergleich stellt die Linearität oder die Nicht-Linearität des Prozessverlaufs einen wichtigen Faktor dar.

3.1.3 Ausgewählte Phasenmodelle aus der Mathematikdidaktik im Vergleich

In seiner Studie vergleicht Rott verschiedene Phasenmodelle und ordnet einzelne Phasen drei übergeordneten „Kategorien“ zu. Im Folgenden (siehe Abb. 3) erläutern und vergleichen wir drei ausgewählte Modelle, die auch Rott in seiner Arbeit analysiert (Rott 2014, 257f.):

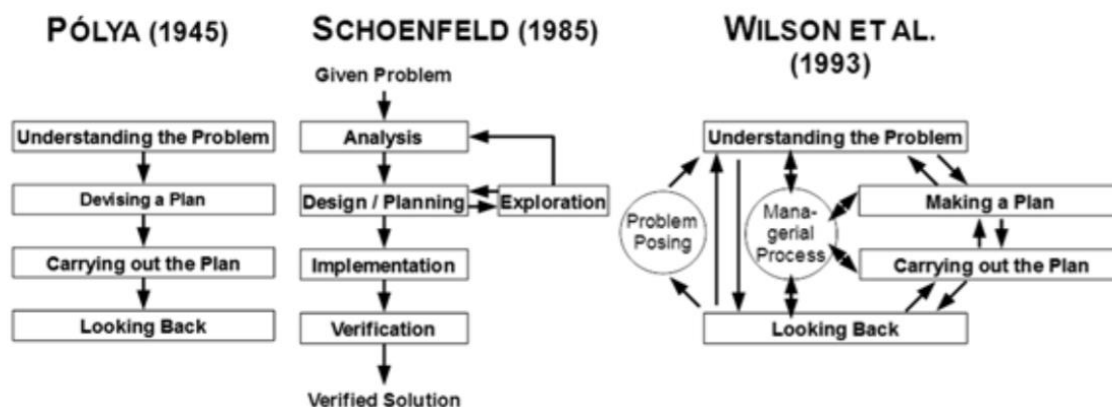


Abb. 3: Ausgewählte Phasenmodelle der Mathematikdidaktik

Autor	Einstieg	eigentliche Arbeit am Problem	Ausklang
Pólya (1945)	Understanding the Problem: In dieser Phase durchdringt man ein Problem. Zum Beispiel wird die Aufgabenstellung umformuliert und gegebene und gesuchte Größen „herausgestellt“. Ein Verständnis der Problemhaftigkeit der Situation wird vorausgesetzt.	Die eigentliche Arbeit am Problem besteht hier aus einer umfangreichen Planung und deren Ausführung. Im Modell werden zwei einzelne Phasen genannt: Devising a Plan und Carrying out the Plan.	Der Abschluss des Problembearbeitungsprozesses stellt bei Pólya die Rückschau (Looking back) dar. Dabei wird die Lösung als Ganzes überprüft und das eigene Vorgehen beim Problemlösen reflektiert.
	Das Modell von Pólya stellt einen linearen Prozessverlauf dar, der in der Literatur mehrfach kritisiert wird. Rott (2014, 259) geht jedoch davon aus, dass diese <i>scheinbare</i> Linearität die Folge einer vereinfachten Darstellung ist, da Pólya offensichtlich ein <i>normatives Modell</i> entwickelt hatte.		
Schoenfeld (1985)	Analysis: Auch bei Schoenfeld geht es in dieser ersten Phase um das Durchdringen der Aufgabenstellung und um dazugehörige strukturierende Tätigkeiten wie Umformulieren und Sachverhalte hervorheben.	Schoenfeld differenziert die Phase der Planung in ein strukturiertes Vorgehen, das Design / Planning, und ein eher unstrukturiertes, heuristisches Vorgehen, die Exploration.² Die Phase der Ausführung, die Implementation, übernimmt Schoenfeld exakt von Pólya.	Als Verification übernimmt Schoenfeld die Phase des Ausklangs (Rückschau) direkt von Pólya. Auch hier geht es um eine Überprüfung des Gesamtergebnisses und eine Reflexion des Prozessverlaufs.
	Das Modell von Schoenfeld (1985, zit. nach Rott 2014, 259) ist ein Beispiel für ein Modell, das den linearen Prozessverlauf durchbricht. Dies stellt neben der „neuen“ Phase der Exploration einen wichtigen Unterschied dar. Im Modell von Schoenfeld werden Rückschritte zwischen Analysis, Planning und Exploration vorgesehen (vgl. Rott 2014). Ab der Implementation verläuft der Problembearbeitungsprozess jedoch wieder linear.		
Wilson et al. (1993)	Die einzelnen Phasen von Pólya sind auch bei Wilson et al. zu finden (Understanding the Problem, Making a Plan, Carrying out the Plan und Looking back). Der bedeutende Unterschied von Wilson et al. zu Pólya liegt bei der ausgeprägten <i>Nicht-Linearität des Problembearbeitungsprozesses</i>. Es besteht die Möglichkeit, zwischen jeglichen Phasen Vor- und Rückschritte zu vollziehen (Rott 2014, 256). Im Vergleich zu Pólya stellt das „Problem-Aufstellen“ (Problem Posing) bei Wilson et al. eine eigenständige Phase dar (Rott 2013, 58f.). Ausserdem legen die Autoren hier einen besonderen Wert auf die selbstregulativen Tätigkeiten (managerial process).		

Tab. 2: Vergleich von drei ausgewählten Phasenmodellen

² Auch Schoenfeld modellierte ein normatives Modell. Die Unterteilung in strukturiertes **Planning** und unstrukturiertere **Exploration** soll nach Rott (2014, 259) den Schülerinnen und Schülern aufzeigen, dass ein Problem auch erfolgreich gelöst werden kann, wenn sie nicht auf Anhieb einen strukturierten Lösungsplan entwickeln können.

Die drei oben dargelegten Modelle typisieren exemplarisch Phasenmodelle der Mathematikdidaktik. Das Modell von Pólya bildet die Grundlage vieler Phasenmodelle. Schoenfeld (1985) ergänzt das Modell mit der zusätzlichen Phase des *Explorierens*. Wilson et al. (1993) durchbricht die Linearität und lässt im gesamten Problembearbeitungsprozess Rückschritte zu. Diese zwei Elemente beeinflussen die Entwicklung von Rotts Phasenmodell massgeblich. Rott stützt sich auf die Phasen von Schoenfeld und übernimmt die Idee der zyklischen Phasenwechsel in sein Modell (vgl. Rott 2014).

3.2 Phasenmodell nach Rott

Bei der Auswertung seiner Daten hielt sich Rott (2014, 266f., vgl. ebd. 2013) an die Episodeneinteilung nach Schoenfeld. Folgende Episoden wurden dabei codiert (ebd., 2014, 267):

- Das **Reading** beinhaltet sowohl das Lesen der Aufgabenstellung als auch die Stille nach dem Lesen.
- Zur **Analysis** werden Versuche, die Aufgabenstellung zu verstehen, gezählt. Hierzu gehört sowohl das Umformulieren und Vereinfachen des Aufgabentextes als auch das Anfertigen von Skizzen, Übersichten und Beispielen. Die Lernenden befinden sich in dieser Phase sehr nahe am Aufgabentext.
- Die **Exploration** ist die Erkundung der Aufgabe und des Problemraums. In dieser Phase werden Heuristiken angewendet. Die Suche erfolgt chaotischer und weiter weg vom eigentlichen Aufgabentext als die Analyse.
- Zum **Planning** zählt das Aufstellen eines explizit geäußerten und strukturierten Lösungsplans.
- Die **Implementation** beinhaltet zum einen die Durchführung eines Lösungsplans und zum anderen die Kontrolle einzelner Rechenwege.
- Zur **Verification** zählen sämtliche Bemühungen, die Lösung zu kontrollieren (Plausibilitätskontrollen) und den eigenen Lösungsweg zu reflektieren.

Da sich nicht alle beobachteten Tätigkeiten der Probanden mit diesen Phasen beschreiben ließen, fügte Rott (2014, 267) noch weitere Phasen hinzu: Die **Abschweifung** und das **Schreiben**. Als **Abschweifung** werden alle Tätigkeiten beschrieben, die weder inhaltlich noch organisatorisch mit der Bearbeitung der Aufgabe zu tun haben und als **Schreiben** alle Tätigkeiten, die mit der Dokumentation der Problembearbeitung im Zusammenhang stehen.

Die bestehenden (normativen) Phasenmodelle, die Rott theoretisch ausgewertet hatte, eigneten sich nicht für eine adäquate Deskription in seinem Setting. Jedoch gab es einzelne Elemente dieser Modelle, die für eine passende Beschreibung von Problembearbeitungsprozessen äusserst hilfreich waren (Rott 2014, 272f.). Mit diesen Erkenntnissen entwickelte Rott ein eigenes, deskriptives Phasenmodell. Dieses Modell sollte Folgendes berücksichtigen (ebd. 2014, 272):

- Das Phasenmodell sollte eine Unterscheidungsmöglichkeit zwischen einem strukturierten und einem unstrukturierten Verhalten zulassen. Daraus ergab sich die Unterscheidung zwischen Planung und Exploration.
- Rott stellte ausserdem fest, dass eine Unterscheidung zwischen expliziter und impliziter Planung sinnvoll wäre.

- Das Modell sollte sowohl lineare als auch nicht-lineare Prozesse zulassen und Phasenwechsel zwischen allen Phasen erlauben.

Aus diesen Überlegungen ergab sich das folgende Modell (ebd. 2014, 273):

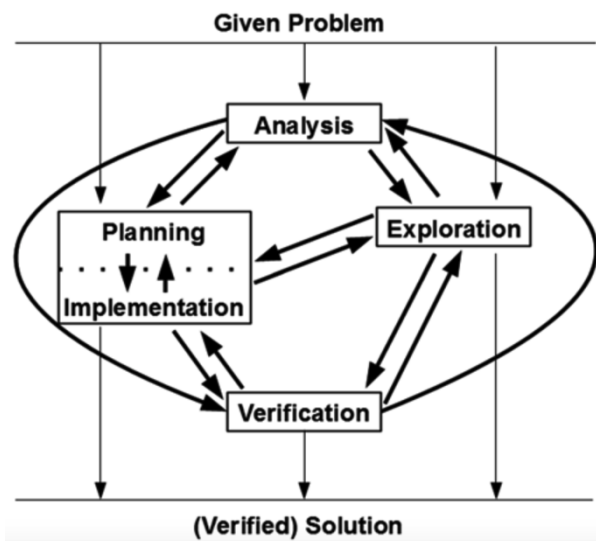


Abb. 4: Deskriptives Phasenmodell von Rott

In das deskriptive Phasenmodell von Problembearbeitungsprozessen integrierte Rott (2014, 273f.) sämtliche Phasen von Schoenfeld (1985). Gestartet wird der Prozess mit einem gegebenen Problem („Given Problem“) und endet bei einer verifizierten Lösung („Verified Solution“). Die Pfeile zwischen den einzelnen Phasen verdeutlichen, dass zwischen sämtlichen Phasen Wechsel vorkommen können.

Wie dies schon Schoenfeld (1985) gemacht hatte, unterscheidet Rott zwischen einer zielgerichteten, strukturierten **Planung** und dem unstrukturierten, heuristischen **Explorieren**. Die Differenzierung von expliziter und impliziter Planung geschieht anhand der Phase „**Planung - Ausführung**“ (vgl. Rott 2014, 273). Durch die verbundene Darstellung im Modell wird verdeutlicht, dass Planung und Ausführung auch kombiniert vorkommen können - eben dann, wenn der Plan nicht explizit geäußert wurde stattdessen gleich mit der Ausführung begonnen wird (vgl. ebd. 2014, 273).

Hierzu betont Rott (2014, 273) die Unterschiedlichkeit der von ihm und von Schoenfeld angelegten Studien. Schoenfeld (1985, zit. nach Rott 2014, 256/272) fertigte sein Modell für Studenten im Rahmen von Universitätsseminaren zum Problemlösen an. Rott (2014, 273f.) erwähnt, dass erfahrenere mathematische Problemlöserinnen und Problemlöser ihre Pläne explizit und klarer formulieren, als die Schülerinnen und Schüler aus den MALU-Klassen in den Untersuchungen von Rott. Ausserdem sei die Planung äusserst aufgabenspezifisch - einige Aufgaben erlauben oder fordern gar eine strukturiertere, zielgerichtete Planung für eine erfolgreiche Problemlösung (ebd. 2014, 273f.). Da Rott den Anspruch erhoben hatte, ein möglichst breit anwendbares Modell zu modellieren, entschied er sich für diese kombinierte Darstellung von Planung - Ausführung.

Rott (2014, 274) erwähnt explizit, dass sich dieses Phasenmodell wegen seiner Entstehung vorrangig zur Deskription von Problembearbeitungsprozessen von jüngeren Schülerinnen und Schülern (die in Paaren oder Kleingruppen arbeiten³) eignet.

³ In seiner Studie lässt Rott (2013) die Probanden in Paaren oder in Kleingruppen arbeiten.

4 COMPUTER IM GEOMETRIEUNTERRICHT - DYNAMISCHE GEOMETRIE

Im folgenden Kapitel werden die dynamischen Geometriesysteme beschrieben und auf deren möglichen Nutzen für den Unterricht auf der Sekundarstufe I eingegangen.

4.1 Forschungsstand

Die empirische Forschung hat sich bisher wenig mit den Bedingungen für ein erfolgreiches Lernen im Bereich der Mathematik mit computerbasierten Medien auseinandergesetzt. Es liegen folglich kaum Forschungsergebnisse vor, welche insbesondere die neuen dynamischen und interaktiven Darstellungs- und Arbeitsmöglichkeiten bei computergestützten Lernumgebungen miteinbeziehen. Daher ist noch nicht hinreichend empirisch belegt, welche Kompetenzen Lernende für ein fruchtbares Lernen in einem solchen Setting benötigen (Haug 2012, 2). Haug (2012) schloss aus seinem Studium von bereits vorhandenen empirischen Studien, dass der Einsatz von dynamischen Elementen nicht zwingend eine höhere Wirkung auf das Lehren und Erlernen der grundlegenden mathematischen Inhalte zulässt, als dies bei Papier- und Bleistift-Aufgaben der Fall ist.

Im Folgenden werden die Systeme für den computergestützten Mathematikunterricht umrissen und insbesondere auf das grundlegende System für die dynamische Geometrie eingegangen.

4.2 Systeme für den computergestützten Mathematikunterricht

Die zentralen Systeme, die für den computergestützten Mathematikunterricht von Bedeutung sind, lassen sich auf folgende drei Systeme eingrenzen (Barzel, Hussmann u. Leuders 2009, 36):

- Tabellenkalkulationen (TK),
- Computer-Algebra-Systeme (CAS) – einschliesslich Funktionsplotter,
- Dynamische Geometriesoftware (DGS).

Die drei Systeme stehen für unterschiedliche Darstellungsarten und Einsatzbereiche, in welchen mathematische Objekte repräsentiert werden.

- die numerische-tabellarische Darstellung in der Tabellenkalkulation,
- die algebraisch-symbolische Darstellung, die bei CAS vorrangig ist,
- die graphisch-visuelle Darstellung, die bei DGS dominiert.

Jedoch sind die Programmtypen nicht auf eine einzige Darstellungsart limitiert. Neuere Programme fassen die einzelnen Programmtypen zusammen und nutzen einen gemeinsamen Grafikbereich. GeoGebra vereint zum Beispiel die DGS mit CAS in bidirektionaler Art und schliesst auch TK mit ein (Barzel, Hussmann u. Leuders 2009, 36). Wie bereits der Name andeutet, sind für den Geometrieunterricht auf der Sekundarstufe I DGS die wichtigsten Computerprogramme. So liegt auch beim Einsatz von GeoGebra in der Schule für die Lernenden der Fokus auf DGS. CAS läuft zwar im Hintergrund mit, ist aber für die Lernenden in diesen Lernsettings im Geometrieunterricht weniger von Bedeutung.

4.3 Dynamische Geometriesoftware

Weigand und Weth (2002, 157) umschreiben DGS folgendermassen:

„DGS stellen alle Zirkel-und-Lineal-Operationen zur Verfügung. Es können also Punkte, Geraden, Halbgeraden, Strecken, Dreiecke und Kreise sowie Schnittpunkte dieser Objekte in der Ebene gezeichnet und konstruiert werden. Darüber hinaus sind aber auch »Geodreieck-Operationen« wie das Abtragen von Winkeln vorgegebener Grösse und das Einzeichnen von Strecken bestimmter Länge möglich.“

Die Auswirkungen des Computers in der Geometrie erscheinen von geringerem Ausmass, als dies in der Folge der Taschenrechner und Computer Einführung im Algebra- und Analysisunterricht der Fall war. Diese Hilfsmittel forderten ein Nachdenken über seit langem nicht angetastete Unterrichtsinhalte (Weigand u. Weth 2002, 155). DGS entpuppt sich in der Unterrichtspraxis eher als ergänzendes Medium bei der Bearbeitung der herkömmlichen Inhalte.

4.4 Vorteile dynamischer Geometriesoftware

Weigand und Weth (2002, 157) sehen Vorteile der DGS gegenüber den traditionellen Konstruktionswerkzeugen in verschiedenen Punkten, sind aber nach wie vor Verfechter der klassischen Zirkel-Lineal-Konstruktion. Hervorzuheben und in dieser Masterarbeit von Relevanz ist vor allem der Zugmodus. Mit ihm lassen sich auf zeitsparende Weise andere Beispiele zu einem gegebenen Problem erzeugen und gemachte Beobachtungen verifizieren (Weigand u. Weth 2002, 160, Hole 2009, 149). Der Vorteil liegt vor allem darin, dass das Verändern von „ikonischen Darstellungen“ die Möglichkeit bietet zu überprüfen, in welchen Lagen die Eigenschaften „invariant bleiben und daher für den Begriff charakteristisch sind“ (Kimeswenger u. Hohenwarter 2015, 173). Auch Barzel, Hussmann und Leuders (2009, 39ff.) und Ludwig und Weigand (2014, 76f.) erwähnen die grosse Chance, die mit der direkten Rückmeldung durch die einfache Manipulation mit dem Zugmodus verbunden ist. Die Lernenden können die Auswirkung ihres selbständigen Handelns unvermittelt erleben und nachvollziehen. Damit wird funktionales Denken gefestigt und erkundendes Lernen gefördert. Die statischen und dynamischen Visualisierungsmöglichkeiten regen zudem an, die ikonischen Darstellungsformen genau zu betrachten und Wechselbeziehungen zwischen ihnen zu untersuchen. DGS ermöglicht es den Lernenden, in Eigenregie eine grosse Zahl von Beispielen zu erzeugen, welche als Ausgangspunkt für Problemlösungen oder Vermutungs- und Begründungsfindung dienen. Gerade im Bereich der Geometrie lässt sich mit DGS auch die Argumentationskompetenz fördern, da das interaktive Verändern von Figuren zur Suche von allgemeingültigen Sachverhalten anregt (Holland 2007, 78). Das Dynamische spielt damit einen weiteren Vorteil aus, da nicht einfach ein zufälliger Prototyp statisch betrachtet wird und zufällige Einzellagen Umstände zeigen, die als charakteristisch wahrgenommen werden (Elschenbroich 2009, 77). So kann der Aufbau eigener innerer Bilder gefördert werden (Kimeswenger u. Hohenwarter 2015, 174).

Ebenfalls fördert DGS die Anwendung und Einübung von Heuristiken, wie Spezialfälle betrachten oder systematisches Probieren. Hole (2009, 149) fügt noch an, dass in der klassischen Papier- -Bleistift-Geometrie Modelle oft nur als Demonstrationsmodelle vorhanden waren, welche die Lehrperson im frontalen Unterricht einsetzte. Oftmals sind solche Modelle wie sie bei DGS ver-

wendet werden mechanisch gar nicht realisierbar oder nur unter grossem Aufwand zu erstellen. DGS-Modelle müssen nur einmal erstellt werden und können dann einer beliebig grossen Gruppe zur Verfügung gestellt werden. Solche Modelle tragen zu einer verstärkten Schülerorientierung im Mathematikunterricht bei.

4.5 Dynamische GeoGebra-Applets⁴

Als Applets werden in dieser Arbeit GeoGebra-Dokumente benannt, welche als HTML-Seiten gestaltet und mit einer Aufgabenstellung ergänzt sind. Die Geometrie steht hier im Vordergrund und TK und CAS werden nicht eingesetzt. Wenn im Rahmen von DGS Applets eingesetzt werden, kommen die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Vorteile zum Tragen. Hölzl und Schelldorfer (2013, 9) führen ihre mit Applets gemachten Erfahrungen folgendermassen aus:

„Mit Applets lassen sich explorative Lernarrangements gestalten, in denen die interaktive Erkundung einer geometrischen Konstruktion, eines Begriffsumfangs, das Gewinnen und Überprüfen einer Vermutung zu einem zentralen Bestandteil des Lernprozesses wird.“

Bei einem Lernarrangement mit DGS, bei welchen mit Applets gearbeitet wird, kann der Lernende sich auf die Problemstellung konzentrieren, da die konzeptuelle und technische Ebene der gewählten Software in den Hintergrund rückt und keine programmspezifischen Kenntnisse von Nöten sind. So besteht nicht die Gefahr, dass die Lernenden noch vor der eigentlichen Aufgabebearbeitung scheitern (Haug 2012, 1).

Damit die Arbeit mit Applets auch möglichst reibungslos funktioniert, zählen Hölzel und Schelldorfer (2013, 10) vier Grundsätze der Appletgestaltung auf, die berücksichtigt werden sollen:

„In einem Applet sollten enthalten sein:

- *ein kurzer Einleitungstext, an welchen Objekten (üblicherweise Punkten) „gezogen“ werden kann (diese Punkte können z. B. gross und rot dargestellt werden);*
- *möglichst kurze und klar formulierte Aufträge;*
- *eine übersichtliche, nicht zu komplexe Situation, meist ohne Massangaben (hier hilft oft auch das Ein-/Ausblenden von Informationen)*
- *keine unnötigen Bezeichnungen der Objekte (dies bedeutet allerdings, dass beim Dokumentieren selbst Bezeichnungen eingeführt werden müssen).“*

4.6 Einsatz von DGS-Applets auf der Sekundarstufe I

Im regulären Unterricht auf der Sekundarstufe I im Kanton Zürich hat der Einsatz von Applets mit der Einführung des Mathematik Lehrmittels „Mathematik“⁵ Einzug gehalten. Dadurch, dass zu verschiedenen Geometriekapiteln Applets zur Verfügung stehen und diese auch online auf der Seite des Lehrmittels⁶ abgerufen werden können, gestaltet sich der Einsatz sehr niederschwellig. Ein gewichtiger Vorteil daraus ist, dass die Lehrperson keine programmspezifischen Kenntnisse benötigt. Dadurch, dass in vielen Schulhäusern die multimediale Einrichtung immer besser wird, können diese auch für den Unterricht und von den einzelnen Lernenden genutzt

⁴ Dieser Masterarbeit liegen GeoGebra-Applets zugrunde, darum beziehen wir uns hier auf GeoGebra.

⁵ Keller, Franz et al. „Mathematik 1“ 2011, „Mathematik 2“ 2012, „Mathematik 3“ 2013. Lehrmittelverlag Zürich.

⁶ <http://www.lehrmittelverlag-zuerich.ch/LehrmittelSites/MathematikSekundarstufe/ÜberdasLehrmittel/-tabid/507/language/de-CH/Default.aspx> Zugriff 27.10.2016.

werden. Gerade auch die Implementation von Tablet-Klassen bieten eine gute Grundlage, um im Geometrieunterricht ergänzend zur herkömmlichen Geometrie mit Applets zu arbeiten.

4.6.1 DGS im Lehrplan 21

Auch der Lehrplan 21 nimmt DGS auf, wenn auch im kleinen Umfang. Zwei Kompetenzen des dritten Zyklus beziehen sich auf DGS. Die Kompetenzen sind so formuliert, dass sie am besten mit DGS in Form von Applets erreicht werden können. Da das Lehrmittel „Mathematik“ als Lehrplan 21 konform gilt, wird sich in der Unterrichtspraxis vorerst nichts ändern. Nach wie vor ist nicht vorgesehen, dass die Lernenden in der Geometrie mit DGS konstruieren.

MA.2		Form und Raum
B		<i>Erforschen und Argumentieren</i>
1. Die Schülerinnen und Schüler können geometrische Beziehungen, insbesondere zwischen Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen.		
Die Schülerinnen und Schüler...		
3	h	– können beim Erforschen geometrischer Beziehungen Vermutungen formulieren, überprüfen und allenfalls neue Vermutungen formulieren. – Lassen sich auf Forschungsaufgaben zu Form und Raum ein (z.B. Rechtecke auf Rasterlinien zeichnen und die Anzahl Gitterpunkte auf den Diagonalen untersuchen).
	i	– Können den Computer zur Erforschung geometrischer Beziehungen nutzen (z.B. die Lage des Umkreismittelpunktes bei spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfwinkligen Dreiecken).
	j	– Können geometrische Beziehungen in Vielecken - insbesondere zwischen Winkeln, Längen und Flächen - variieren, dazu Vermutungen austauschen (z.B. die Spitze in einem Dreieck parallel zur Grundlinie verschieben, Winkelbeziehungen in einem Dreiecksgitter). – Können dynamische Geometriesoftware zum Erforschen geometrischer Beziehungen verwenden (z.B. das Verhältnis der Teilstrecken bei Seitenhalbierenden; die Lage des Umkreismittelpunkts bei verschiedenen Dreiecken).

Tab. 3: Auszug aus dem Lehrplan (D-EDK 2016, 23)

II. Methode

5 FRAGESTELLUNG UND KONKRETISIERUNG

In diesem Kapitel legen wir die Fragenstellungen dar und ergänzen diese mit den Zielen, die wir erreichen möchten.

5.1 Fragen zum Prozess des Problemlösens

Im theoretischen Teil wurden verschiedene (mehrheitlich normative) Phasenmodelle des Problembearbeitungsprozesses beschrieben. Auf dieser Grundlage entwickelte Rott (2013) ein deskriptives Phasenmodell. Es liegen bisher wenig empirische Daten vor, die zeigen, ob sich mit Hilfe solcher Phasenmodelle empirische Prozesse beschreiben lassen. Unsere Frage lautet daher:

(I) Welche Phasen des Problembearbeitungsprozesses (nach Rott 2013) lassen sich beim Bearbeiten der Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I beobachten?

Das Phasenmodell von Rott (2013) sieht explizit Rückschritte zwischen allen Phasen vor. Daraus abgeleitet ergibt sich die Fragestellung:

(I.1) Lassen sich mit dem Phasenmodell von Rott sämtliche beobachtbaren Problemlösephasen identifizieren und sind Rückschritte ersichtlich?

5.2 Fragen zum Einsatz dynamischer Geometriesysteme

Im Unterschied zu den empirischen Untersuchungen von Rott (2013) bearbeiten bei der hier vorliegenden Arbeit die Probanden die Aufgaben am Computer mit DGS. Da die Datengrundlage für das Phasenmodell von Papier – Bleistift Aufgaben stammt, stellen wir uns folgende Frage:

(II) Ergeben sich durch die Bearbeitung am Computer allenfalls Erweiterungen oder Anpassungen am Phasenmodell von Rott?

Konkret zum Einsatz der dynamischen Geometriesysteme stellen sich uns folgende Fragen:

(II.1) Zeigen sich unterschiedliche Verwendungen beim Einsatz der dynamischen Geometriesysteme?

(II.2) In welchen Episoden kommen welche Tätigkeiten vor?

Alle aufgeführten Fragen verlangen für ihre Beantwortung eine Analyse des Problembearbeitungsprozesses. Es reicht nicht, ausschliesslich Problemlöseprodukte auszuwerten (vgl. Rott 2013, 122).

6 SAMPLING – AUSWAHL DER PROBANDEN

Die Auswahl der Probanden erfolgte im April 2016. Fünf Lehrpersonen der Sekundarschule Hinwil erklärten sich bereit, gegebenenfalls Schülerinnen und Schüler für die Fallstudie freizustellen. Alle Klassen entstammen der Sek A und arbeiten in der Mathematik mit dem Arbeitsheft für das Niveau I⁷. In einer Klasse stellte Frau Mettler unser Vorhaben vor und in den anderen Klassen übernahm dies jeweils die Lehrperson. Den Schülerinnen und Schülern stand es frei, sich für die Fallstudie zu melden. Daraufhin meldeten sich aus vier Klassen je zwei und aus einer Klasse fünf Lernende. In der Klasse, in welcher sich fünf Lernende bereit erklärt haben bei der Fallstudie mitzumachen, bildete die Lehrperson zwei Tandems und eine Person verzichtete auf die Teilnahme. Durch die Freiwilligkeit stellt die Stichprobe eine Positivauswahl betreffend dem Interesse und der Motivation dar (vgl. Rott 2014, 263). Es wurden bewusst nur Klassen der Sekundarschule A angefragt, die dem Niveau I angehören, da die Aufgaben erhöhte kognitive Anforderungen erfordern. Die Probanden besuchten zum Zeitpunkt der Durchführung die erste bis zur dritten Sekundarschule. Die mathematischen Inhalte, welche die Aufgaben erforderten, hatten bis zu diesem Zeitpunkt alle Klassen bereits behandelt.

⁷ Niveau I stellt das anspruchsvollste von drei Niveaus dar.

7 STOFFDIDAKTISCHE AUFGABENANALYSE

Im Folgenden werden die beiden Aufgaben, welche von unseren Probanden bearbeitet wurden, vorgestellt und stoffdidaktisch analysiert. Dabei handelt es sich jeweils um Problemlöseaufgaben aus der Geometrie. Diese bearbeiteten die Probanden mit Applets, die auf dem Programm GeoGebra basieren. Von den beiden Aufgaben haben wir eine aus dem Repertoire von Rott (2013) gewählt, damit wir direkte Ähnlichkeiten und Unterschiede zu den Untersuchungen von Rott (2013) erahnen können. Die andere Aufgabe stellte keine Aufgabe aus den Untersuchungen von Rott (2013) dar.

7.1 Aufgabe 1: Das drehende Quadrat

Die erste Aufgabe „das drehende Quadrat“ haben wir nach Rott (2013, 137ff.) übernommen und angepasst. Dieser stützt sich nach eigenen Angaben auf Schoenfeld (1985, zit. nach Rott 2013, 137), wo die vorliegende Aufgabe als eine Beispielaufgabe genannt wird, bei welcher die heuristische Strategie „Spezialfälle betrachten“ zum Tragen kommt.

7.1.1 Beschreibung der Aufgabe

Abbildung 5 zeigt unsere Aufgabenstellung, wie sie auf dem Applet und dem Dokumentationsblatt festgehalten ist. Abbildung 6 zeigt einen Screenshot des Applets, das von René Schellendorfer mit dem dynamischen Geometriesystem GeoGebra entwickelt wurde. Dabei hat er das Applet ganz nach den Vorgaben der Aufgabenstellung erstellt. Beweglich sind im Applet bloss die Teile, die es laut der Aufgabenstellung zu verändern gilt. Folglich kann die Ecke des beweglichen Quadrates nicht vom Punkt M fortbewegt werden. Unter folgendem Link ist die Aufgabe zu betrachten: <http://www.mathemusiker.ch/aufgabe1/>

Das drehende Quadrat (Aufgabe 1)

Mit dem roten Punkt F kannst du das Quadrat drehen.

Die beiden unten abgebildeten Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.

Untersuche die Grösse der Fläche, die von *beiden* Bierdeckeln überdeckt wird! *Begründe* deine Entdeckungen.

Abb. 5: Aufgabenstellung der Aufgabe 1: „Das drehende Quadrat“

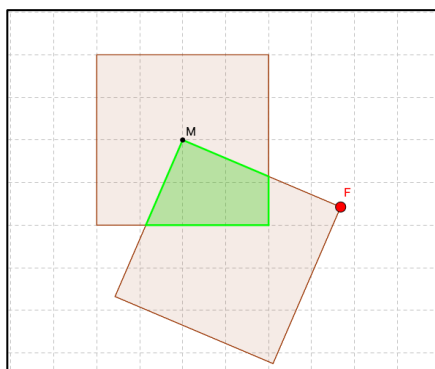


Abb. 6: Applet zur Aufgabe 1

Als Hilfestellung dienen die Gitternetzlinien, die dem Applet hinterlegt sind. Wir haben uns für diese Hilfestellung entschieden, damit der Flächeninhalt der grünen Fläche in der Einheit „Häuschen“ *ermittelt* (und nicht *berechnet*) und in Beziehung zur Gesamtfläche gesetzt werden kann. Dies soll die Erkenntnis, dass die grüne Fläche jeweils ein Viertel der Gesamtfläche eines Quadrates ausmacht, unterstützen. Da das Applet auch keine Längenangaben zu den jeweiligen Strecken enthält, sind die Probanden weniger versucht die Strecken am Bildschirm nachzumessen. Die Grössenangaben haben wir bewusst nicht sichtbar gemacht, da diese für die Lösung des Problems nicht notwendig sind. Ziel ist es, dass die Probanden die Grösse der überdeckten Fläche in unterschiedlichen Lagen *untersuchen*. Die Kompetenz, den Flächeninhalt von ebenen Figuren zu berechnen, wird hier nicht benötigt.

Zur Sicherung und Orientierung dient das Dokumentationsblatt, auf welchem die Probanden Erkenntnisse, Erklärungen und Begründungen mit geeigneten Skizzen festhalten sollen (siehe Abb. 7). Als Strukturierungshilfe für die Dokumentation wird die Grundlage für die Skizze bereits vorgegeben. Damit soll der Aufwand des Schreibens und Zeichnens möglichst kleingehalten werden. Die Vorgabe ist identisch zur Darstellung im Applet.

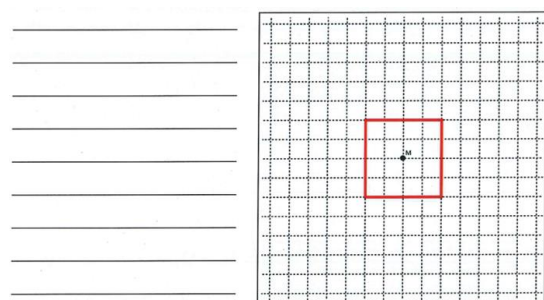


Abb. 7: Auszug aus dem Dokumentationsblatt zur Aufgabe 1

7.1.2 Abweichung zur Aufgabe von Rott

In seiner Studie hat Rott (in insgesamt vier Durchgängen) mit zwei unterschiedlichen Aufgabenformulierungen zur Bierdeckelaufgabe gearbeitet, wobei er Variante A in den ersten zwei und Variante B in den zwei letzten Durchgängen eingesetzt hat (Rott 2013, 137):

Variante A	Variante B
Zwei Bierdeckel Die beiden unten stehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt. Untersuche die Grösse der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abbildung ist diese Fläche rot gekennzeichnet.⁸]	Zwei Bierdeckel Zwei gleiche Bierdeckel werden so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt. Eine Möglichkeit, wie die Bierdeckel übereinander liegen dürfen, sieht man in der Abbildung. Wie gross ist die Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abbildung ist diese Fläche rot gekennzeichnet.]

Tab. 4: Aufgabenbeschriebe von Rott zur Bierdeckelaufgabe

⁸ Hier gilt es zu bemerken, dass Schoenfeld (1985, zit. nach Rott 2013, 137) in seinen Studien auf eine Skizze der Ausgangssituation (zwei sich überlappende Quadrate) gänzlich verzichtet hat.

Beide Aufgaben bieten Vor- und Nachteile. Bei der Variante A könnte man darauf schliessen, dass die Grösse der grünen Fläche in einer speziellen Lage ermittelt werden soll (vgl. Rott 2013, 137). Im Vergleich dazu wird in der Variante B explizit darauf hingewiesen, dass die Abbildung lediglich *eine* mögliche Anordnung der Quadrate darstellt (vgl. Rott 2013, 137), was einer ergiebigen Bearbeitung der Problemaufgabe einen grossen Vorteil einträgt.

Auf der anderen Seite überzeugt der Operator „untersuchen“ bei der Variante A. Bei der Variante B scheint den Probanden nahegelegt zu werden, den Flächeninhalt besagter Fläche (in unterschiedlichen Situationen) zu *berechnen*. Da auch bei der Aufgabenstellung von Rott keine Grössenangaben vorhanden sind, kann die Formulierung „Wie gross ist...?“ etwas irreführend sein. Aus der Aufgabenstellung bei der Variante B geht nicht deutlich hervor, was von den Probanden verlangt wird. Es scheint, als müsste eine Fläche *berechnet* werden. Dass eine korrekte Bearbeitung einen Bruch - also ein Verhältnis der überdeckten Fläche zur Quadratfläche - verlangt, wird aus der Aufgabenstellung nicht deutlich (vgl. Rott 2013, 138)⁹.

Unser Entscheid fiel klar zugunsten einer Aufgabenformulierung mit dem Operator „untersuchen“. Dadurch wird die Aufgabenstellung offener und lässt Bearbeitungen auf unterschiedlichem Niveau zu. Die Erkenntnis, dass die Fläche, die von beiden Quadraten überdeckt wird, *immer gleich gross* ist, gewinnt an Bedeutung und steht im Zentrum des Problemlöseprozesses. Es gilt, diese Erkenntnis zu gewinnen und auch zu begründen. Da die Aufgabe mit dem dynamischen Applet durchgeführt wird, kann auf den Hinweis von Variante B, dass die Abbildung bloss *eine* mögliche Lage zeigt, verzichtet werden.

Das Begründen von Erkenntnissen ist ein wichtiger Bestandteil der Aufgabe und stellt vermutlich den entscheidenden Unterschied zu Rotts Aufgabenstellungen dar.

Obschon sich unsere Aufgabenstellung nur leicht von derjenigen von Rott unterscheidet, sind andere Erwartungen an die Bearbeitungen der Probanden vorhanden. Bei Rott wird der Schwerpunkt auf das Verhältnis der überdeckten Fläche zur Quadratfläche gelegt. Dieses Verhältnis ist bei unserer Variation weniger bedeutend, da die Grösse der Fläche dank den Gitternetzlinien ohne grossen Aufwand (anhand der Spezialfälle) direkt abgelesen und mit der Quadratfläche verglichen werden kann. Im Zentrum unserer Aufgabenstellung steht die Begründung, *weshalb* die überdeckte Fläche in allen Lagen der Quadrate stets gleich gross ist.

7.1.3 Didaktischer Kommentar

In den folgenden Abschnitten wird die Aufgabe aus mathematikdidaktischer Sicht betrachtet und diskutiert.

7.1.3.1 Problemlöseaspekt

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um ein „Begründungsproblem“ (vgl. Kapitel 1, Wittmann 2014). Ziel der Aufgabe ist die Erkenntnis, dass die überdeckte Fläche jeweils ein Viertel der Quadratfläche ist, und deren anschliessende Begründung. Folgende Aspekte machen die Aufgabe zur Problemaufgabe: Da für den Beweis kein eindeutiges, gängiges Verfahren vor-

⁹ Rott (2013, 137f.) erwähnt hierzu, dass die Aufgabenstellung durch einen entsprechenden Zusatz unübersichtlich würde.

liegt, müssen Heuristiken zur Hilfe genommen werden. In dieser Aufgabe stehen drei heuristische Strategien und Prinzipien im Vordergrund:

Spezialfälle betrachten: Das Betrachten von Spezialfällen ist wohl die offensichtlichste heuristische Strategie dieser Problemaufgabe. Über diesen Heurismus scheint es klar, dass der Inhalt der überdeckten Fläche stets ein Viertel einer Quadratfläche ist.

Systematisches Probieren und **Zerlegungsprinzip:** Durch systematisches Probieren und mithilfe des Zerlegungsprinzips kann der Flächeninhalt der überdeckten Fläche in verschiedenen Situationen ermittelt werden.

Ergänzen und Zerlegen: Mit dem inhaltsspezifischen Heurismus Ergänzen und Zerlegen kann die Begründung der Aufgabe hergeleitet werden. Hierzu wird die Begründung im Abschnitt 7.1.5.2 genauer erläutert.

Für die Problemhaftigkeit der Aufgabe für die einzelnen Probanden spielt selbstverständlich auch deren Vorwissen eine Rolle. Wir gehen davon aus, dass die Probanden bisher keine ähnliche Begründungsaufgabe bearbeitet haben und die vorliegende Aufgabe für die Probanden somit *keine* Routineaufgabe ist.

7.1.3.2 Notwendige Voraussetzungen

Damit die Problemaufgabe gelöst werden kann, ist es sinnvoll, dass das Kapitel 7 „Ebene Figuren“ im aktuellen Mathematiklehrmittel des Kantons Zürich „Mathematik 1“¹⁰ für die erste Sekundarschule bereits behandelt wurde. Die Probanden benötigen ein Verständnis des Begriffs *Fläche*. Die Flächenberechnung von ebenen Figuren mit Grössenangaben ist bei der Aufgabe jedoch nicht erforderlich, da der Flächeninhalt der grünen Fläche anhand des Häuschenrasters ermittelt werden kann. Hilfreich scheint hierfür jedoch, dass die Probanden das Teilkapitel 7c „Dreiecke als halbe Vierecke“ behandelt haben, damit die Ermittlung der Fläche anhand von angebrochenen Häuschen erfolgreich sein kann.

7.1.3.3 Mögliche Schwierigkeiten

Die grösste Schwierigkeit der Aufgabe wird wohl in der Begründung liegen. Vielen Schülerinnen und Schülern auf der Sekundarstufe I fällt das Begründen schwer. Wir erwarten, dass einige der Probanden nicht sicher sind, welche Aussagen oder Tätigkeiten für eine Begründung notwendig sind. Wir erachten es als wahrscheinlich, dass sich einige der Probanden mit dem Betrachten von Spezialfällen als Begründung zufrieden geben.

In der Aufgabenstellung ist die Rede von der „Grösse der Fläche“. Der präzisere Begriff wäre wohl der „Flächeninhalt“ gewesen. Diese etwas unscharfe Bezeichnung könnte bei den Probanden zu Unsicherheiten führen im Bezug darauf, was genau untersucht werden muss (Flächeninhalt, Umfang, Form).

Nicht zuletzt ist für uns fraglich, ob die „Bierdeckel“ als Einkleidung der Aufgabe einen Mehrwert bringen oder die Probanden bloss verwirren. Der Alltagsbezug für die Lernenden der Sekundarstufe I scheint nicht mehr so klar (da immer weniger von „Bierdeckeln“ die Rede ist). Rott (2013,

¹⁰ Keller, Franz et al. 2011. „Mathematik 1“. Lehrmittelverlag Zürich.

138) begründet diese Einkleidung der Aufgabe damit, dass das Bild der zwei Bierdeckeln die „Beweglichkeit“ der Konstellation in der Aufgabenstellung hervorheben würde. In der dynamischen Version der Aufgabe hätte man unseres Erachtens diese Einkleidung auch weglassen können, da die Beweglichkeit durch das GeoGebra-Applet klar genug zum Ausdruck kommt.

7.1.4 Möglicher Nutzen der dynamischen Geometrie bei der Problembearbeitung

Für die Ausführungen zu den erwarteten dynamischen Aspekten stützen wir uns auf Kapitel 4.

Wir erwarten, dass die Probanden den Zugmodus nutzen, um auf zeitsparende Weise viele verschiedene Beispiele zu erzeugen und zu überprüfen. Sie erhalten jeweils direkt eine visualisierte Rückmeldung zu ihrem Handeln. Für die Begründungsfindung können die Probanden das Applet mit Hilfe des systematischen Probierens dynamisch einsetzen. Damit meinen wir, dass das äussere Quadrat nicht sprunghaft zu den Spezialfällen des Quadrats und Dreiecks bewegt wird, sondern die Fälle dazwischen durch langsames Bewegen betrachtet werden. Die Visualisierung kann die Probanden vermutlich dazu anregen, die Fälle genau zu betrachten und die Wechselbeziehungen zwischen ihnen zu untersuchen. Hierbei könnte auch ein Unterschied zur Problembearbeitung bei Rott (2013) liegen, da dort die Probanden „nur“ mit Papier und Bleistift gearbeitet haben. Wir erhoffen uns, dass die Probanden durch die Möglichkeit des interaktiven Veränderns des Applets zur Suche von allgemeingültigen Sachverhalten angeregt werden. Durch die Bearbeitung der Aufgabe im Tandem besteht die Möglichkeit, dass sich die Probanden Ideen und Erklärungsansätze bezüglich der Problemlösung gegenseitig mit dem Applet zeigen. Da dies weniger umständlich ist als bei einer Papier-Bleistift-Aufgabe, ist die Schwelle niedriger, Ideen auch wirklich auszuprobieren und nicht gleich bei einer Unsicherheit zu verwerfen. Somit kann die Argumentationskompetenz mit dem geplanten Setting unterstützt werden.

Bei der Applet Gestaltung wurde auf die vier Grundsätze geachtet, welche Hölzel und Schelldorfer ausführen (2013, 10). Dadurch sind wenige Abschweifungsmöglichkeiten vorhanden und der dynamische Aspekt des Applets kann seine Wirkung entfalten.

7.1.5 Lösungswege

Nachfolgend werden zuerst Teillösungen und Lösungswege vorgestellt, die wir von den Probanden erwarten können. Danach begründen wir diese Lösungen mathematisch.

7.1.5.1 Zu erwartende Teillösungen und Lösungswege von den Probanden

Bei der Bearbeitung der vorliegenden Problemaufgabe gilt es, folgende zwei Erkenntnisse zu erlangen und diese schliesslich zu begründen:

1. Die grüne (überdeckte) Fläche ist ein Viertel der Quadratfläche. Oder: Die grüne (überdeckte) Fläche ist vier Häuschen gross. *Diese Erkenntnis kann über die Spezialfälle oder durch systematisches Probieren mit Hilfe des Zerlegungsprinzips erlangt werden.*
2. Die grüne (überdeckte) Fläche ist stets gleich gross - unabhängig von der Lage des drehenden Quadrates.

Eine gute Begründung aus Sicht der Lernenden der Sekundarstufe I erwarten wir wie folgt (beispielhafte Skizze in Abb. 8):

„Wenn man das eine Quadrat um den Mittelpunkt des anderen dreht, kommt bei der überdeckten Fläche immer genau gleich viel hinzu, wie auf der anderen Seite weg geht (in der Abbildung ist dies gelb dargestellt). Deshalb ist die Fläche immer gleich gross.“

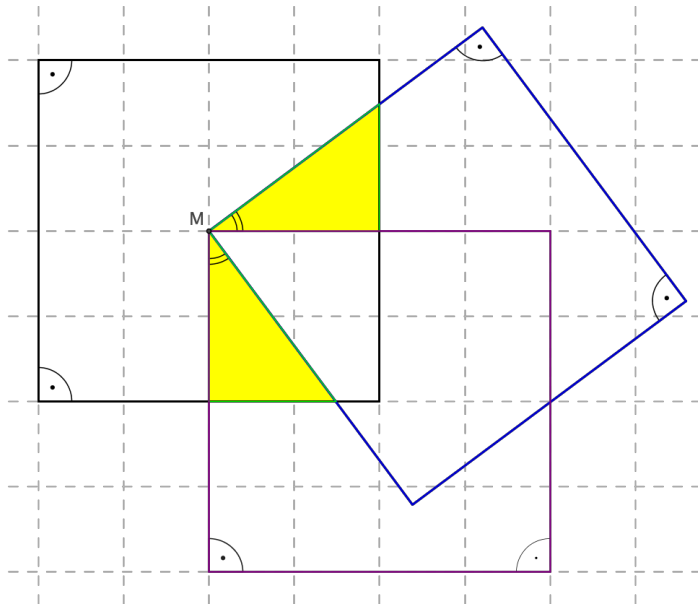


Abb. 8: Begründung der Aufgabe 1: mögliche Schülerlösung

7.1.5.2 Mathematische Begründungen

Im Folgenden wird die vorliegende Aufgabe mathematisch auf zwei unterschiedliche Arten begründet.

Begründung über kongruente Dreiecke (vgl. Rott 2013, 139):

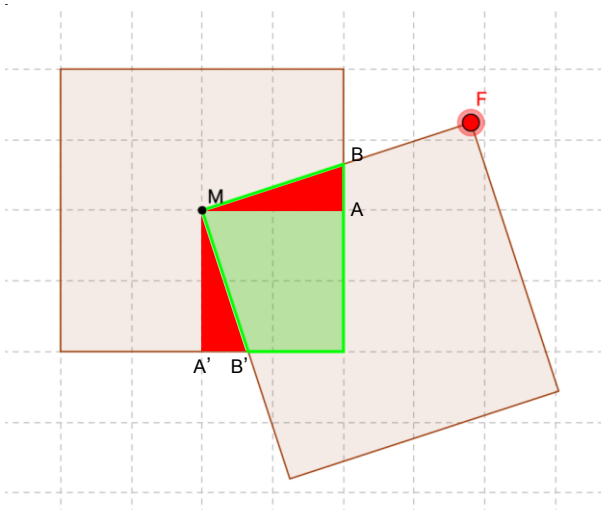


Abb. 9: Begründung der Aufgabe 1 über kongruente Dreiecke

Die Dreiecke Δ_{MAB} und $\Delta_{MA'B'}$ sind kongruent. Dies ist wegen des Kongruenzsatzes WSE (Winkel, Seite, Winkel) der Fall (vgl. Rott 2013, 138). – Die Strecken AM und $A'M$ sind gleich lang, nämlich zwei Einheiten. – Die Winkel $\omega(BAM)$ und $\omega(BA'M')$ sind jeweils 90° (Quadrat). – Die Winkel $\omega(AMB)$ und $\omega(A'MB')$ sind gleich gross. Der Beweis dafür: Der Winkel $\omega(AMB)$ ist zusammen mit Winkel δ 90°. Der Winkel $\omega(A'MB')$ ist zusammen mit Winkel δ 90°. <i>Der Winkel δ ist in beiden Fällen gleich.</i> Daraus ergibt sich, dass die Winkel $\omega(AMB)$ und $\omega(A'MB')$ gleich gross sind.	$\Delta_{MAB} \equiv \Delta_{MA'B'}$ $ AM = A'M $ $\omega(BAM) = \omega(BA'M') = 90^\circ$ $\omega(AMB) + \delta = 90^\circ$ $\omega(A'MB') + \delta = 90^\circ$ $\omega(AMB) + \delta = \omega(A'MB') + \delta \quad - \delta$ $\omega(AMB) = \omega(A'MB')$
--	--

Tab. 5: Formale Begründung zur Aufgabe 1

Begründung über kongruente Vierecke (vgl. ebd. 2013, 138f.):

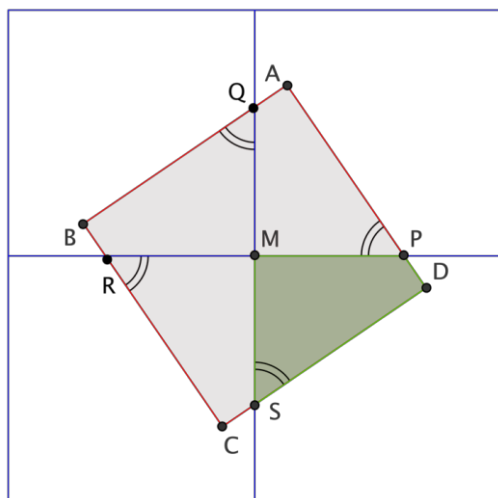


Abb. 10: Begründung der Aufgabe 1 über kongruente Vierecke

In Abbildung 10 wird das blaue Quadrat (bewegliches Quadrat) mehrfach mit dem Drehwinkel von 90° um den Mittelpunkt des roten (festen) Quadrates gedreht (vgl. Rott 2013, 138). Bei der vierten Drehung kommt das blaue Quadrat wieder auf sich selbst zu liegen. Das rote Quadrat wird bei der Rotation um seinen Mittelpunkt stets auf sich selbst abgebildet (ebd. 2013, 138).

Da das rote Quadrat gleich gross ist wie ein einzelnes blaues Quadrat, ist der Flächeninhalt des roten Quadrates ein Viertel des blauen.

Bei der Rotation des blauen um den Mittelpunkt des roten Quadrates, entstehen im letzteren vier Teilvierecke. Die Teilvierecke $\square_{AQMP}$, $\square_{BRMQ}$, $\square_{CSMR}$, $\square_{DPMS}$ sind aufgrund der Drehsymmetrie kongruent und besitzen demnach denselben Flächeninhalt (ebd. 2013, 138f.) - also einen Viertel des Flächeninhaltes des roten Quadrates.

Tab. 6: Begründung über kongruente Vierecke

7.1.6 Vorgehensweisen

In den folgenden Abschnitten erläutern wir, welche Erkenntnisse und Tätigkeiten wir in den Phasen *Analyse*, *Erkundung*, *Planung-Ausführung* und *Verifikation* erwarten. Wir beziehen uns dabei auf Rott (2013) und ergänzen diese Ausführungen durch Erkenntnisse und Tätigkeiten, die sich durch das veränderte Setting der dynamischen Aufgabe ergeben.

7.1.6.1 Analyse

Zur Phase der *Analyse*, bei welcher es um das Durchdringen der Aufgabenstellung geht, zählt Rott (2013, 143) folgende Tätigkeiten und Erkenntnisse:

- Die Erkenntnis darüber, welche Fläche ermittelt werden soll (nämlich die grün gefärbte Fläche, die von beiden Quadraten überdeckt wird).
- Das Erkennen davon, was in der Aufgabenstellung verlangt wird: In der vorliegenden Aufgabe ist gefordert, die Fläche zu *untersuchen* (durch Häuschen zu ermitteln, untersuchen, wie oder ob sich die Fläche verändert).

Auf die dynamische Aufgabenstellung bezogen gehören unserer Meinung nach folgende Tätigkeiten und Erkenntnisse auch zur Phase der *Analyse*:

- Die Erkenntnisse, dass und wie das eine Quadrat um den Mittelpunkt des anderen Quadrates gedreht werden kann. In seiner Aufgabenstellung erwähnt Rott (2013, 143), dass man sich ab dem Moment, in welchem tatsächlich mit der Rotation gearbeitet wird, nicht mehr in der Phase der *Analyse* befindet. Bei der dynamischen Aufgabe stellt sich hier die Frage, ob das Drehen des Quadrats in jedem Fall tatsächlich bereits in die Phase des Explorierens gehört. Sinnvoll scheint hier folgende Abgrenzung: Wird das Quadrat in der Aufgabenanalyse oder bereits beim Lesen ungerichtet (ohne konkrete Positionen) gedreht, wird das noch der jeweiligen Phase untergeordnet. Dies ist unter anderem der Fall, wenn die Probanden entdecken, wie das GeoGebra-Applet überhaupt funktioniert. Erst das zielgerichtete Drehen um den Mittelpunkt wird zu einer nächsten Phase (Explorieren) gezählt.
- Eine spontane Äusserung zur Lösungsangabe: „Die grüne Fläche ist *immer* ein Viertel der Quadratfläche.“ „Die grüne Fläche ist *immer* vier Häuschen gross.“ Da bei unserer Version der Aufgabe eine Begründung verlangt wird und diese Erkenntnisse durch die Hilfestellungen nicht schwierig zu gewinnen sind, haben wir uns entschieden, diese Tätigkeit zur *Analyse* zu zählen.

7.1.6.2 Explorieren

Für die Phase des *Explorierens* nennt Rott (2013, 143) Folgendes:

- Die Betrachtung von Spezialfällen. Dies erweitert den Suchraum, da es über die Vorgaben der Aufgabenstellung hinausgeht.
- Das Zerlegen der gesuchten Fläche in einfacher zu ermittelnde Teilflächen.
- *Die Suche nach einer Variation der Aufgabe; beispielsweise die Überlagerung von anderen geometrischen Figuren.*

- *Das Weglassen von Bedingungen.* Hier könnten zum Beispiel unterschiedlich grosse Quadrate betrachtet werden oder die Bedingung, dass ein Eckpunkt des einen Quadrates genau in der Mitte des anderen Quadrates befestigt ist.

Die beiden letztgenannten Tätigkeiten können unserer Meinung nach je nach Zeitpunkt der Durchführung auch in die Phase der *Verifikation* gehören. Dies ist dann der Fall, wenn der Problemlöseprozess bereits vorläufig beendet und ein Ergebnis erzielt wurde.

Auf die dynamische Aufgabe bezogen zählen wir ausserdem folgende Tätigkeiten zur Phase der *Exploration*:

- Entdeckungen, die weiter weg von der eigentlichen Problemstellung liegen. Beispielsweise, wenn die Probanden nicht nur den Flächeninhalt, sondern auch die Form oder den Umfang besagter Fläche untersuchen.

7.1.6.3 Planen-Ausführen:

Nach Rott (2013, 143) gehört in die Phase des zielgerichteten *Planens* und der *Ausführung* folgende Tätigkeit:

- Das Zerlegen der gesuchten Fläche in Teilflächen, damit deren Grösse einfacher ermittelt werden kann. Die Ausführung dieses „Plans“, der nicht unbedingt explizit geäussert werden muss, wird danach als typisches Beispiel für ein zielgerichtetes Handeln, wie es diese Phase verlangt, aufgeführt.

In der dynamischen Aufgabe zählen wir auch folgende Tätigkeit zur Phase des *Planens* und der *Ausführung*:

- Das bewusste, langsame und zielgerichtete Drehen des Quadrates im GeoGebra-Applet mit der Beobachtung, wie sich diese grüne (überdeckte) Fläche durch die Lageveränderung in Form und Grösse verändert.

Dieses Vorgehen stellt eine Ausführung allenfalls ohne explizite Äusserung eines Plans dar. Dies ist von der *Exploration* abzugrenzen.

7.1.6.4 Verifikation

Zur Phase der *Verifikation* zählt Rott (2013, 143) keine Tätigkeiten auf. In unserer Aufgabe können wir jedoch Folgendes zur Phase der *Verifikation* zählen:

- Wenn nach zwischenzeitlicher Beendigung des Problembearbeitungsprozesses die Aufgabe variiert wird, beispielsweise durch Weglassen oder Variation einer Bedingung, mit dem Ziel eine „allgemeine Begründung“ zu finden, zählen wir dies zur *Verifikation*. Die Problemlösenden stellen sich in solchen Situationen die Frage, ob die gewonnenen Erkenntnisse auch in einem abgeänderten Kontext anzuwenden sind, was klar für eine *Verifikation* spricht (vgl. Rott 2014, 272ff.).

7.1.7 Bewertung

Für deren Auswertung teilen wir die Problembearbeitungsprozesse in Anlehnung an Rott (2013, 143f.) in vier verschiedene Ansätze ein:

Kein Ansatz: Die Probanden ermitteln in einem Einzelfall den Flächeninhalt der grünen (überdeckten) Fläche. Sie setzen verschiedene Einzelfälle nicht miteinander in Beziehung. Die Probanden entfernen sich vom Problem und untersuchen Eigenschaften, die nicht zur Problemlösung beitragen, beispielsweise die Berechnung des Umfangs der überdeckten Fläche.

Einfacher Ansatz: Die Probanden stellen durch die Betrachtung von mehreren (statischen) Einzelfällen fest, dass die überdeckte Fläche immer gleich gross (also ein Viertel einer Quadratfläche) ist. Sie äussern jedoch keine Begründung zu dieser Erkenntnis.

Erweiterter Ansatz: Die Probanden äussern eine anschauliche Begründung, weshalb die überdeckte Fläche stets gleich gross ist: Der Flächenanteil, der beim Drehen des einen Quadrates um den Mittelpunkt des anderen Quadrates hinzu kommt, geht auf der anderen Seite weg (vgl. Abschnitt 7.1.5.1).

Korrekter Ansatz: Für einen korrekten Ansatz erstellen die Probanden einen mathematischen Beweis und begründen ihre Erkenntnisse über kongruente Vielecke (vgl. Abschnitt 7.1.5.2).

7.2 Aufgabe 2: Vierecke aus zwei Dreiecken

Die zweite Aufgabe stammt aus dem Themenbereich *Vielfalt der Vierecksformen*. Sie wurde von René Schelldorfer entworfen. Im Gespräch zu dritt diskutierten wir die Details betreffend Hilfestellungen und Darstellungsform und legten diese fest.

Vierecke aus zwei Dreiecken (Aufgabe 2)

Mit den drei roten Punkten kannst du die Form des Dreiecks ändern.

Ein Dreieck und sein Spiegelbild sind gegeben. Die Dreiecke sollen so platziert werden, dass sie *gemeinsam* ein Viereck bilden.

Kannst mit den beiden Dreiecken diese Vierecksformen bilden: Quadrat, Rechteck, Rhombus, Parallelogramm, Drachenviereck, Trapez? *Begründe*, wieso die Vierecksform gebildet oder nicht gebildet werden kann.

Abb. 11: Aufgabenstellung der Aufgabe 2: „Vierecke aus zwei Dreiecken“

7.2.1 Beschreibung der Aufgabe

Abbildung 11 zeigt die Aufgabenstellung der zweiten Aufgabe, wie sie im Applet und auf dem Dokumentationsblatt formuliert ist. Abbildung 12 illustriert das Applet zur Aufgabe. Auch dieses wurde von René Schelldorfer mit dem dynamischen Geometriesystem GeoGebra entwickelt und ist unter folgendem Link verfügbar: <http://www.mathemusiker.ch/aufgabe2/>

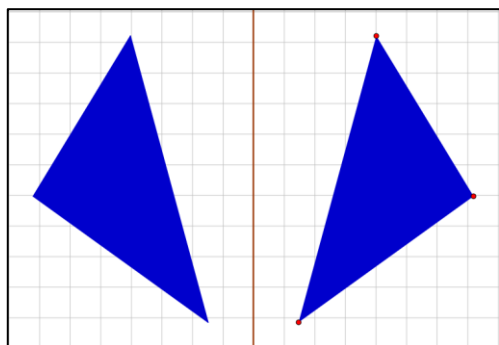


Abb. 12: Applet zur Aufgabe 2

Bei der Applikation können die Probanden alle drei rot markierten Eckpunkte des rechten Dreiecks frei bewegen. Ziel ist es, das Dreieck so an der rot eingezeichneten Spiegelachse zu platzieren, damit es zusammen mit seinem Spiegelbild eine Vierecksform ergibt.

Auch hier dienen die hinterlegten Gitternetzlinien als Hilfestellung. Es soll damit den Probanden erleichtert werden, Eigenschaften der Figuren zu identifizieren, ohne mit dem Geodreieck nachzumessen. Ausserdem ermöglichen die Gitternetzlinien auch ein gezieltes Vorgehen bei der Bildung von ausgewählten Vierecksformen, da rechte Winkel und gleichlange Seiten damit vereinfacht erstellt und überprüft werden können. Aus diesen Gründen konnte auch auf die Angabe von Winkeln und Seitenlängen im Applet verzichtet werden, was das Applet übersichtlicher macht. Die Aufmerksamkeit der Probanden soll so auf die *Form* der gespiegelten Dreiecke gelenkt werden und sie sollen nicht beim Erzeugen exakter Grössen stehen bleiben.

Bei dieser Aufgabe ergänzt ausserdem ein Theorieblatt die Aufgabe, auf welchem die sechs gefragten Vierecksformen abgebildet sind. Einerseits kann damit gegebenenfalls das Verständnis für die gefragten Vierecksformen aufgefrischt werden. Andererseits können die Probanden direkt auf das Theorieblatt auch Hilfslinien oder andere Skizzen einzeichnen.

Wie bei der Aufgabe zum drehenden Quadrat, ist auch bei dieser Aufgabe eine Strukturierungshilfe zur Ergebnisdarstellung auf dem Dokumentationsblatt vorgegeben, damit der Aufbau der Vierecksfigur aus einem Dreieck und seinem Spiegelbild auch zum Vorschein kommt. Dazu ist die Spiegelachse wie im Applet bereits rot eingezeichnet und die Probanden ergänzen die Dreiecke.

7.2.2 Didaktischer Kommentar

In den folgenden Abschnitten wird die Aufgabe aus mathematikdidaktischer Sicht betrachtet und diskutiert.

7.2.2.1 Problemlöseaspekt

Die Aufgabe hat einen anderen Problemlösecharakter als die erste Aufgabe. Bei der Bearbeitung geht es um das Systematisieren nach einem unbekannten Kriterium. Die Ermittlung dieses Kriteriums - die Eigenschaft von Vierecksformen, welche von ihrer Symmetrieachse in zwei Dreiecke geteilt werden - ist die Lösung des Problems.

Für die Aufgabe sind folgende Heuristiken bedeutend und machen sie zu einer Problemlöseaufgabe:

Vorwärtsarbeiten: Ein Beispiel für das Vorwärtsarbeiten ist, wenn die Probanden die einzelnen Vierecksformen zu erstellen versuchen, danach mögliche und unmögliche Figuren vergleichen und nach einem Lösungskriterium suchen.

Analogieschluss: Anhand einer erfolgreich dargestellten Vierecksform schliessen die Probanden auf andere Formen und testen, ob es möglich ist, diese mit den vorhandenen Bedingungen darzustellen.

Systematisches Probieren: Systematisches Probieren kann als Ansatz dienen, wenn die Probanden eine einzelne Vierecksform zu erstellen versuchen und dabei keinen zielgerichteten Plan verfolgen. Sie versuchen, sich der Lösung systematisch zu nähern.

Symmetrieprinzip: Die verschiedenen Vierecksformen können mit dem Symmetrieprinzip auf Symmetrien und Musteranalogien untersucht werden. Mit Hilfe dieser kann das Lösungskriterium ermittelt werden.

Wissensspeicher: Das Theorieblatt kann den Probanden als Wissensspeicher dienen. Insbesondere dann, wenn sie diese Hilfslinien (z.B. Symmetrieachsen) in die dort abgebildeten Vierecksformen einzeichnen.

7.2.2.2 Notwendige Voraussetzungen

Für eine erfolgreiche Bearbeitung der Problemlöseaufgabe ist es notwendig, dass die Lernenden die verschiedenen Vierecksformen erkennen und benennen können und sich deren Eigenschaften bewusst sind (Winkel, Seitenlängen, Diagonalen, Symmetrien). Diese Inhalte werden im Kapitel 7 des Mathematiklehrmittels für die erste Sekundarstufe erarbeitet.

Des Weiteren werden Kenntnisse bezüglich Spiegelungen und Symmetrien vorausgesetzt. Diese Inhalte werden im Kapitel 1 des gleichen Bandes behandelt.

7.2.2.3 Mögliche Schwierigkeiten

Eine grundlegende Schwierigkeit der Aufgabe könnte darin liegen, dass die Lernenden fehlerhafte Präkonzepte bezüglich der Vierecksformen (insbesondere Unsicherheiten bezüglich der Abgrenzung zwischen verschiedenen Vierecksformen) haben könnten. Dem wird jedoch mit dem bereitgestellten Theorieblatt als Hilfestellung entgegengewirkt.

In der Aufgabenstellung wird nach einer allgemeinen Begründung, weshalb einige Vierecksformen aus einem Dreieck und seinem Spiegelbild gebildet werden können, gefragt. Wir erwarten hier (wie schon bei der ersten Aufgabe) Schwierigkeiten mit der allgemeinen Begründung über die Symmetrieeigenschaften der Vierecksformen. Begründungen über fallspezifische Beobachtungen und Beschreibungen von Figuren, *wie* diese zu erzeugen sind, sind durchaus denkbar.

Schliesslich könnte auch die unsichere Verwendung von Begriffen (wie beispielsweise Symmetrieachse, Spiegelachse, Achsenspiegelung, Punktspiegelung oder Drehsymmetrie) eine Schwierigkeit darstellen, um eine saubere, allgemeine Begründung zu formulieren.

7.2.2.4 Begründung der Auswahl der Aufgabe

Wie bereits erwähnt, haben wir hier eine Aufgabe gewählt, die noch nicht Teil einer (uns bekannten) Untersuchung im Bereich Problemlösen war. Die Aufgabe erscheint uns ausserdem als geeignet, weil sie Vorwissen aus demselben Themenbereich wie die erste Aufgabe erfordert und somit bei der Auswahl der Probanden keine neuen Kriterien verlangt.

Bei der Aufgabe Vierecke aus zwei Dreiecken handelt es sich um eine Aufgabe, die ohne den Einsatz des Applets keinen Sinn ergibt. Dadurch erhoffen wir uns andere Vorgehensweisen und eventuell das Erkennen von dynamischen Denkstrukturen.

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine andere Aufgabenart als bei der ersten. Es geht um das Systematisieren von Figuren nach einem unbekannten Kriterium. Ausserdem ist die Aufgabe aus mehreren Teilaufgaben aufgebaut - sie besteht aus mehreren kleinen Problemen, die zu einer übergeordneten Aufgabe zusammengefasst sind. Diese Tatsache war für uns ein grosser Diskus-

sionspunkt bei der Auswahl der zweiten Aufgabe. Problematisch erschien uns insbesondere die Zuteilung der Phasen aus dem Modell von Rott (2014). Wir stellten uns anfangs die Frage, ob man bei der Bearbeitung der Aufgaben wohl mehrere einzelne, kleine Problemlöseprozesse beobachten könne und ob sich das mit einer sinnvollen Zuteilung vereinbaren lässt.

Trotz den Unsicherheiten haben wir uns für diese Aufgabe entschieden. Einerseits, weil wir die Verschiedenheit der beiden Aufgaben als Chance sehen. Da das vorliegende Phasenmodell von Rott (2014) noch nicht oft angewendet wurde, kann uns die Analyse von zwei stark unterschiedlichen Aufgabentypen einen Mehrwert bringen. Andererseits haben wir uns eine Entwicklung einer allgemeinen Erkenntnis oder Idee von Seiten der Probanden bei der Problembearbeitung über die gesamte Aufgabe erhofft.

7.2.3 Möglicher Nutzen der dynamischen Geometrie bei der Problembearbeitung

Mit den Ausführungen zu den erwarteten dynamischen Aspekten stützen wir uns auf Kapitel 3.

Auch bei dieser Aufgabe erhoffen wir uns, dass die Probanden den Zugmodus möglichst viel Nutzen, um zahlreiche Beispiele zu erzeugen und zu überprüfen. Für die Problembearbeitung und die Begründungsfindung mit Hilfe des Applets bieten sich auch hier das systematische Probieren, das Vorwärtsarbeiten und der Analogieschluss an. Im Unterschied zu der ersten Aufgabe ruft das Manipulieren an einem Punkt bei der vorliegenden Aufgabe immer auch eine zweite Reaktion durch die Spiegelachse hervor. Dadurch werden die Probanden wahrscheinlich etwas mehr Orientierungszeit benötigen, um sich mit dem Applet vertraut zu machen.

Der Aufbau der Aufgabe lässt ein systematisches Verändern eines erzeugten Vierecks zu. So könnten die Probanden zum Beispiel aus dem Quadrat durch systematisches Probieren und Vorwärtsarbeiten nach einem klaren Plan und auf dynamische Weise einen Rhombus erzeugen. Damit ist gemeint, dass die Probanden, nachdem sie eine Vierecksform gefunden haben, nicht einfach eine neue suchen, sondern ganz bewusst die nächste aus der bereits gefundenen erzeugen. Wenn dies in dieser oder ähnlichen Art geschieht, wäre dies ein klarer Vorteil gegenüber einer Bleistift-Papier-Aufgabe. Die Probanden könnten so eine dynamische Vorstellung der Vierecksformen entwickeln. Durch das einfache Manipulieren kann es durchaus sein, dass die Probanden zum Beispiel nicht einfach einen Drachen erzeugen, sondern mehrere verschiedene. Dies sind zwar dynamische Aspekte, welche nicht direkt zur gesuchten Problemlösung beitragen, sich aber langfristig positiv auf das geometrische Formenverständnis auswirken könnten.

Das dynamische Setting kann insbesondere bei dieser Aufgabe auch zufällig gefundene Lösungen oder Lösungsansätze ermöglichen, welche durch ein Rückwärtsarbeiten begründet werden können. Das Applet ermöglicht somit eine weite Suche im Problemraum.

Wahrscheinlich werden die Probanden zu Beginn der Aufgabe Vermutungen äussern, welche Vierecksformen erzeugt werden können und welche nicht. Dadurch, dass der Aufwand mit dem Applet gering ist, könnten auch die bereits von ihnen zu Beginn verworfenen Vierecksformen trotzdem noch ausprobiert werden. Dadurch erhoffen wir uns eine vertiefte Bearbeitung der Aufgabe.

Wie bereits bei der ersten Aufgabe ausgeführt, können auch hier Ideen und Vermutungen dank der dynamischen Geometrie schnell überprüft und verifiziert oder falsifiziert werden. Das App-

let unterstützt auch hier wieder die Probanden darin, sich gegenseitig ihre Gedanken zu erklären und darzustellen. Es kann helfen eine Argumentationskompetenz aufzubauen, da sie durch das Setting gezwungen sind, zusammen zu arbeiten und viel zu kommunizieren.

7.2.4 Lösungswege

Bei der Bearbeitung der zweiten Aufgabe gilt es zum einen herauszufinden, welche Vierecksformen mit den gegebenen Bedingungen zu erzeugen sind. Dies sind folgende: Quadrat, Rhombus und Drachenviereck (siehe Abb. 13).

Zum anderen gilt es, darauf aufbauend das unbekannte Kriterium bezüglich der Systematisierung zu ermitteln. Dieses Kriterium lautet wie folgt:

„Alle Vierecksformen, bei welchen die Symmetrieachse das Viereck in zwei Dreiecke teilt, können aus einem Dreieck und seinem Spiegelbild erzeugt werden.“

Da es sich hier im Gegensatz zur ersten Aufgabe nicht um ein Begründungsproblem handelt, scheint es nicht sinnvoll und notwendig zu sein, den Sachverhalt formal zu begründen.

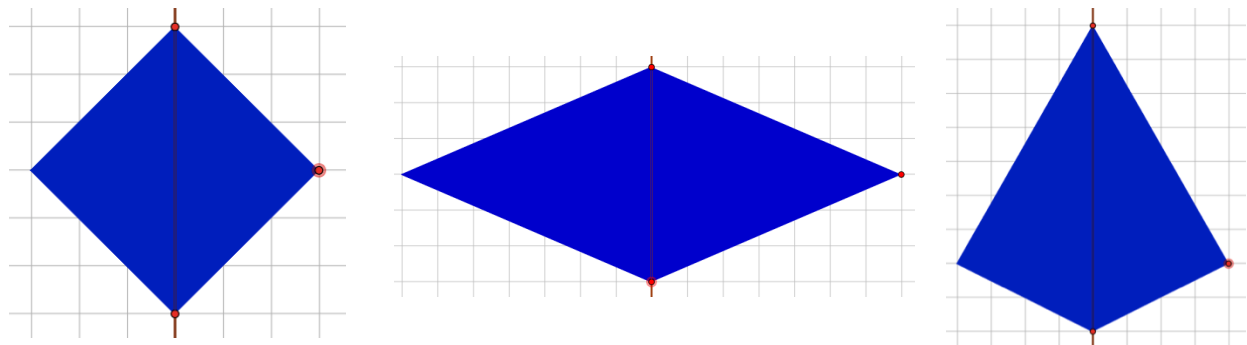


Abb. 13: Mögliche Vierecksformen zur Aufgabe 2

7.2.5 Vorgehensweisen

In den folgenden Abschnitten erläutern wir, welche Erkenntnisse und Tätigkeiten wir in den Phasen *Analyse*, *Explorieren*, *Planung-Ausführung* und *Verifikation* erwarten.

7.2.5.1 Analyse

Zur Phase der *Analyse* zählen wir folgende Erkenntnisse und Tätigkeiten:

- Das ungerichtete Bewegen der Eckpunkte des Dreiecks (ohne der Absicht, eine Vierecksform zu erzeugen). Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Manipulation dem Kennenlernen und Verstehen des Applet dient.
- Eine spontane Äußerung darüber, welche Vierecksformen erzeugt werden können oder eben nicht. Äußerungen dieser Art stellen keine Lösung des Problems dar und sind ohne das Ermitteln des Lösungskriteriums entstanden. Deshalb liegt hier noch immer die Phase der *Analyse* vor.
- Die spontane Äußerung zum Lösungskriterium, wobei diese kein Produkt einer ersichtlichen Bearbeitung ist.

7.2.5.2 Explorieren

Die Einordnung von Erkenntnissen und Tätigkeiten zur Phase des *Explorierens* bedingt in der vorliegenden Aufgabe die Manipulation an dem Applet. Folgendes wird zu dieser Phase gezählt:

- Der Versuch, eine Vierecksform darzustellen, ohne genauen Plan zu verfolgen, *wie* die Form herzustellen ist. Wir können hier von einem „Pröbeln“ (Ausprobieren) sprechen.
- Die spontane (überraschende) Entdeckung einer Vierecksform, ohne dass eine direkte Absicht vorlag, diese zu erstellen.
- Weiterführende Erkenntnisse, Erklärungen und Entdeckungen, die nicht die explizit geforderte *Begründung* im Fokus haben. Beispielsweise können dies Erkenntnisse über ausgewählte Figuren und die Bedingungen sein, unter welchen diese erstellt werden können, wenn dabei eine *fallspezifische* Begründung / Beschreibung und keine allgemeine „Bedingung“ formuliert wird.

7.2.5.3 Planen - Ausführung

Für die *Planung* und *Ausführung* muss ein zielgerichtetes Handeln ersichtlich sein. Folgende Tätigkeiten stufen wir entweder als *Planung*, als *Ausführung* oder als Kombination „*Planung-Ausführung*“ (wenn der Plan nicht explizit geäußert wird) ein.

- Der Versuch, eine spezifische Vierecksform darzustellen mit einem klar geäußerten Plan oder einer Erklärung während der Ausführung.
- Das Zerlegen der Vierecksformen auf dem Theorieblatt in Dreiecke und die Überprüfung auf Symmetrieachsen, wenn dieser Plan explizit geäußert wurde.
- Das Einzeichnen von Symmetrieachsen der Vierecksformen auf dem Theorieblatt.

7.2.5.4 Verifikation

Die *Verifikation* kann unserer Meinung nach bei dieser Aufgabe auf unterschiedlichem Niveau geschehen; auf der Ebene einer einzelnen Figur oder auf der Ebene einer allgemeinen Begründung. Folgende Tätigkeiten weisen wir der Phase der *Verifikation* zu:

- Ein nachträgliches Überprüfen auf dem Theorieblatt: Haben alle Vierecksformen, die mit den Bedingungen erzeugt werden können, eine Spiegelachse, die das Viereck in zwei Dreiecke teilt?
- Das nachträgliche Überprüfen oder Präzisieren einer ausgewählten Vierecksform.

7.2.6 Bewertung

Für die Auswertung teilen wir die Problembearbeitungsprozesse in verschiedene Ansätze ein.

Kein Ansatz: Die Probanden kommen nicht über die Feststellung hinaus, welche Vierecksformen erzeugt werden können. Sie suchen nicht nach gemeinsamen oder abgrenzenden Eigenschaften. Eventuell finden sie nicht alle möglichen Vierecksformen.

Einfacher Ansatz: Die Probanden finden alle Vierecksformen, die erzeugt werden können. Sie erkennen, wie das Dreieck gespiegelt und wie durch diese Spiegelung ein Viereck erzeugt wird.

Den Probanden gelingt die Verbindung zur Eigenschaft des Vierecks - der Achsensymmetrie - nicht.

Erweiterter Ansatz: Die Probanden finden alle Vierecksformen, die erzeugt werden können, und beschreiben gemeinsame Eigenschaften: Die Probanden können die Achsenspiegelung mit der Symmetrieeigenschaft der Vierecksform in Verbindung setzen.

Korrektter Ansatz: Die Probanden erläutern sowohl verbindende als auch abgrenzende Eigenschaften von den Vierecksformen, die erzeugt werden können. Sie argumentieren dabei über die Symmetrieachsen und über die Teildreiecke, die bei der Teilung durch die Symmetrieachse entstehen müssen.

8 BESCHREIBUNG DES SETTINGS / METHODENWAHL

8.1 Versuchsaufbau

Aus den freiwilligen Schülerinnen und Schülern wurden Tandems für die Bearbeitung der Problemlöseaufgaben gebildet. Dies geschah jeweils innerhalb der Klasse. Da sich aus vier Klassen jeweils genau zwei Lernende bereit erklärt hatten, um an der Fallstudie mitzumachen, erübrigte sich eine Einteilung. Bei der anderen Klasse übernahm dies, wie bereits erwähnt, die Lehrperson. Die sechs Tandems setzten sich folgendermassen zusammen:

- Zwei Tandems aus der ersten Sekundarstufe I; die Tandems waren zusammengesetzt aus je einem Mädchen und einem Jungen
- Ein Tandem aus der zweiten Sekundarstufe I; das Tandem war zusammengesetzt aus zwei Jungen
- Drei Tandems aus der dritten Sekundarstufe I; die Tandems waren zusammengesetzt aus zwei Mädchen, zwei Jungen und einem Mädchen und einem Jungen

Wir entschieden uns für eine Durchführung unter Laborbedingungen. Das heisst, die Probanden bearbeiteten die Aufgaben nicht in einer Unterrichtssituation im Klassenverband, sondern in einem separat eingerichteten Gruppenraum (vgl. Kittel 2007, 85).

Wir legten uns auf eine Bearbeitung der Aufgaben durch Schülertandems fest. Dadurch wurde das künstliche Setting wieder etwas aufgelockert und wir befanden uns näher am Problemlösen im Schulkontext. Zudem wurde die Methode der Partnerarbeit gewählt, um einen Meinungsaustausch zwischen den Probanden zu gewährleisten und „die Struktur der Prozesse und die Gedankengänge der Kinder durch Kommunikation zugänglich zu machen“ (Rott 2014, 263). Der gewichtigste Vorteil der Partnerarbeit ist, dass die Probanden nicht durch einen Interviewer im Problembearbeitungsprozess gestört und die Gedankengänge dennoch verbalisiert werden (vgl. Kittel 2007, 84). Da wir keine Rückschlüsse auf individuelle Schülerinnen und Schüler ziehen wollen, hat die Methode der Partnerarbeit keine gewichtigen Nachteile (vgl. Rott 2014, 280). Während die Probanden die Problemlöseaufgaben bearbeiteten, verliessen wir den Raum und kehrten erst nach etwa zehn bis 15 Minuten zurück oder allenfalls früher, wenn die Probanden signalisierten, dass sie bereits fertig waren.

8.2 Videografie

Wir zeichneten jeden Problembearbeitungsprozess auf drei Videospuren auf (vgl. Abb.14). Die Webcam filmte die Probanden von vorne. So ist ihre Mimik gut ersichtlich und dadurch, dass wir ihre Gesichter sehen, ist auch das Gesprochene bei akustisch schlecht verständlichen Sequenzen besser nachzuvollziehen (vgl. Kittel 2007, 86). Zudem nahmen wir mit dem QuickTime Player den gesamten Bildschirm auf, da dieser für die Auswertung eine entscheidende Rolle spielte. Damit konnten wir nachverfolgen, was genau auf dem Bildschirm in der jeweiligen Situation vorstättenging. Die gesamte Situation filmten wir zusätzlich mit einer Kamera, die sich schräg hinter den Probanden befand. Auf dieser Aufnahme wurden Gesten und Interaktionen mit dem Bildschirm ersichtlich, welche von den anderen beiden Perspektiven nicht aufgezeichnet werden konnten. Durch die Erhebung von Filmdaten werden die Prozesse „verzeitlicht“ und „reversibel“

gemacht. Sie ermöglichen eine Betrachtung von Ereignissen, die gleichzeitig auftreten (Herrle, Kade u. Nolda 2013, 599).

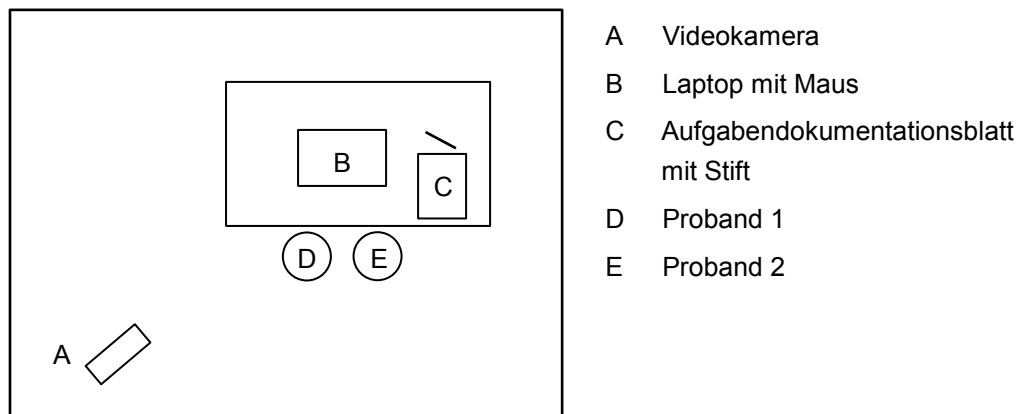


Abb. 14: Aufnahmesetting

9 DATENLAGE

9.1 Synchronisierte Videos aus drei Perspektiven

Die drei Videos, die für jeden Problembearbeitungsprozess aufgenommen wurden, fügten wir für eine einfachere Datenauswertung zu einem einzigen, synchronisierten Video zusammen (vgl. Abb. 15). Wir entschieden uns das Video, das wir mit der Videokamera aufzeichneten, am grössten darzustellen, da auf ihm die gesamte Situation gut ersichtlich ist. Die Screenaufnahme und die Aufnahme der Webcam ergänzen das Bild auch mit kleineren Bildausschnitten optimal. Für die Videobearbeitung verwendeten wir das Videoschnittprogramm Adobe Premiere.

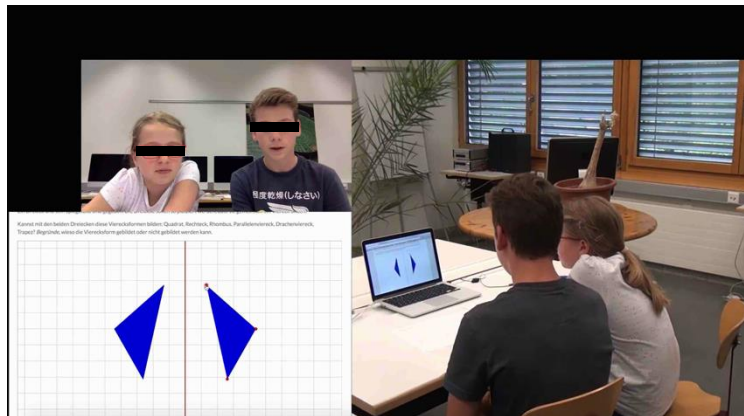


Abb. 15: Synchronisierte Videos

9.2 Dokumentationsblätter und Präsentation der Ergebnisse der Probanden

Die Probanden legten uns nach jedem Problembearbeitungsprozess ihr Vorgehen und ihre Entdeckungen dar. Diese Sequenzen wurden ebenfalls auf Video aufgezeichnet. Dies geschah anhand der von ihnen erstellten Skizzen und Beschreibungen auf den Dokumentationsblättern. Wir behielten uns vor, kurze Rückfragen bei Unklarheiten zu stellen.

10 DATENAUSWERTUNG

Insgesamt zeichneten wir zwölf Problembearbeitungsprozesse auf. Für die hier vorliegende qualitative Fallstudie werten wir von drei Tandems jeweils die Aufgabe 1 und die Aufgabe 2 aus.

10.1 Auswahl

Wir entschieden uns die Problembearbeitungsprozesse von Tandem 1, Tandem 4 und Tandem 5 auszuwerten. Die Auswahl stellt eine Positivauswahl betreffend der Problembearbeitung dar, bedingt aber nicht einen *erweiterten* oder *korrekten Ansatz* hinsichtlich der Problemlösung (vgl. Kapitel 7.1.7).

10.2 Auswertung der Videos

Die Videos werden zum einen hinsichtlich dem Phasenmodell ausgewertet und zum anderen mit dem Fokus auf die Nutzung der dynamischen Geometrie.

10.2.1 Zuordnung zum Phasenmodell

Die Videos werten wir in zwei Schritten aus. In einem ersten Schritt erstellen wir Solution Summaries. In einem zweiten Schritt codieren wir die Videos anhand der Solution Summaries mit dem Programm SWITCHcast. Dabei gehen wir deduktiv vor und verwenden die Kategorienbildung nach Rott (2013) für die Einteilung nach Episoden (Mayring 2010, 65f.). Wenn wir Sequenzen in den Solution Summaries oder auch bei den Ergebnissen transkribieren, übersetzen wir das Gesprochene in Schriftsprache und orientieren uns an den Normen der Standardorthographie (Langer 2013, 518).

10.2.1.1 Solution Summary

Die Solution Summaries geben eine erste Übersicht über den Prozessverlauf. Diese erstellen wir nach einem ersten Anschauen der Videos. Die wichtigsten Tätigkeiten werden darin zusammengefasst. Dies kann beschreibend sowie auch in kurzen transkribierten Sequenzen geschehen. Die Solution Summaries dienen hauptsächlich der Strukturierung. Anhand dieser teilen wir die Problembearbeitungsprozesse grob in Phasen ein (Rott 2013, Anhang A3). Wir werden die Solution Summaries getrennt fertigen. Dies hat den Vorteil, dass wir zwei subjektive Sichtweisen haben und diese zusammenführen müssen. So können wir unklare Episoden nochmals genauer betrachten.

10.2.2 Auswertung der dynamischen Geometrie

Für die Auswertung betreffend der dynamischen Geometrie gehen wir bei der Kategorienbildung induktiv vor (Mayring 2010, 65f.). Aus einer ersten Sichtung des Materials erstellten wir die Kategorien, nach welchen wir die Videos codieren.

10.2.3 SWITCHcast

Mit dem Programm SWITCHcast ordnen wir jeder Phase des Problembearbeitungsprozesses einen Episodentyp zu. Zum einen sind dies die beschriebenen Phasen aus dem Phasenmodell.

Zum andern werden diese noch mit den Episodentypen Lesen, Schreiben, Abschweifung, Organisation, Transition und Sonstiges ergänzt¹¹. Anhand von diesen Episodentypen wird der Problembearbeitungsprozess eingeteilt. Dabei sind die Episoden nicht in ihrer Länge festgelegt. Wir werden gemeinsam diese Einteilung, mit den vorgängig erstellten und diskutierten Solution Summaries vornehmen. Der Einteilung liegt das „event sampling“ (vgl. Rott 2013, Anhang A3) zugrunde, bei welchem der Prozess in unterschiedlich grosse Zeitabschnitte eingeteilt wird. Bei dem hier beschriebenen Vorgehen handelt es sich um ein *makroskopisches* Schema. Dies bedeutet, dass wir als Rater nicht zu kleinschrittig vorgehen und darauf achten den Gesamtprozess nicht aus den Augen dem Auge zu verlieren (Rott 2013, Anhang A3). Dadurch, dass mit dem Erstellen und Diskutieren der Solution Summaries bereits eine grobe Einteilung der Episoden vorgenommen wird, liegt der Fokus bei diesem Auswertungsschritt darauf, herauszufinden, wann genau eine neue Episode startet und wann sie endet. Für diese Auswertung erstellen wir vorgängig einen Codierbaum¹². Den Phasen Analyse und Verifikation teilen wir verschiedene Labels zu. Die Analyse codieren wir mit den Labels *spontane Äusserung*, *Durcharbeiten* und *Vereinfachung*, *Beispiel Umformulierung*. Die Phase der Verifikation unterteilen wir in *inhaltliche Verifikation* und *methodische Verifikation*.

Für die dynamische Geometrie legen wir folgende zwei Kategorien fest: Die Nutzung des Applets zur *Erkenntnisgewinnung* und zur *Darstellung und gegenseitigen Erklärung*. Der Kategorie der Erkenntnisgewinnung teilen wir drei verschiedene Labels zu. Dies sind: *Entdeckendes Variieren*, *Spezialfälle* und *Invarianten*.

The screenshot displays the SWITCHcast software interface. The main window shows a video of two students working on a dynamic geometry applet. On the right side, there is a coding tree (Codierbaum) with the following structure:

Lesen	Analyse	Erkunden	Planung - A...	Verifikation	Schreiben	Abschweifu...
LES	ANA	ERK	P-A	VER	SCH	ABS
	spo			inh		
	dur			met		
	vbu					

At the bottom, there is a timeline showing the sequence of events with timestamps and labels like LES, ANA, ERK, etc.

Abb. 16: Programmoberfläche von SWITCHcast mit Codierbaum

10.3 Auswertung der Begleitmaterialien

Die Begleitmaterialien werden nicht einzeln ausgewertet, sondern werden während dem Auswertungsprozess der Problembearbeitungsprozesse zur Hilfe genommen, um unklare Stellen

¹¹ Siehe Codiermanual im Anhang C.

¹² Im Codierbaum ist die Phase der Exploration mit Erkunden beschriftet, da wir uns zu diesem Zeitpunkt noch nicht auf die definitiven Phasenbezeichnungen festgelegt hatten.

besser zu verstehen. Die Dokumentationsblätter dienen auch dazu, im Ergebnisteil Prozesse der Problembearbeitung darzulegen und Entdeckungen von Seiten der Probanden aufzuzeigen.

10.4 Fallbezogene Darstellung der Ergebnisse

Im Ergebnisteil gehen wir fallbezogen vor. Zuerst werden die Problemlöseprozesse der Aufgabe 1 dargelegt, besprochen und verglichen und im Anschluss diejenigen der Aufgabe 2. In einem weiteren Schritt gehen wir auf die Fragestellungen bezüglich der dynamischen Geometrie ein.

III. Ergebnisse

11 IDENTIFIKATION DER PHASEN IN DEN PROBLEMBEARBEITUNGSPROZESSEN

In diesem Kapitel wenden wir uns der Frage zu, welche Phasen des Phasenmodells von Rott (2013) sich in den einzelnen Bearbeitungsprozessen identifizieren lassen:

(I) Welche Phasen des Problembearbeitungsprozesses (nach Rott 2013) lassen sich beim Bearbeiten der Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I beobachten?

Die synchronisierten Videos wurden im Annotationsprogramm SWITCHcast nach dem erweiterten Codiermanual nach Rott (2013) codiert (vgl. Anhang C). Wir ordneten einzelne Episoden den Codes Schreiben, Lesen, Analyse, Exploration, Planung / Ausführung, Verifikation, Abschweifung, Organisation und Transition zu.

Nachfolgend werden ausgewählte Bearbeitungsprozesse der beiden Aufgaben von je drei Tandems dokumentiert und zueinander in Beziehung gesetzt.

11.1 Aufgabe 1: Das drehende Quadrat

Bei der Aufgabe 1 werden die einzelnen Problembearbeitungsprozesse der drei Tandems zuerst einzeln dokumentiert. Die Dokumentation erfolgt chronologisch nach den identifizierten Episoden geordnet. Anschliessend werden die Phasendurchläufe und die zeitlichen Verläufe der einzelnen Tandems miteinander verglichen.

11.1.1 Beschreibung der Problembearbeitungsprozesse

Vor Beginn der Videoaufnahmen wurde den Probanden das Setting mit der Problemstellung, dem Applet und den Dokumentationsblättern erklärt. Ausserdem wurde die Aufgabenstellung von der Versuchsleitung bereits ein erstes Mal vorgelesen.

11.1.1.1 Tandem 1

Episode 1 - Lesen: (00:00 - 00:24)

Die Probanden lesen die Aufgabenstellung still für sich durch. Beide betrachten das Applet auf dem Computer kurz, ohne dieses zu kommentieren.

Episode 2 - Analyse (00:25 - 00:45)

Mit der *spontanen Äusserung* „es ist doch ein Viertel vom Ganzen“ initiiert J. die Phase der *Analyse*. Zu diesem Zeitpunkt ist das Applet auf den Spezialfall „Quadrat“ (Abb. 17¹³) eingestellt - die Probanden haben noch nichts am Applet verändert. Anschliessend probieren beide Probanden aus, wie im Applet das eine Quadrat um das andere bewegt werden kann. J. stellt offenbar fest, dass die Ecke F mit dem Cursor gefasst und bewegt werden muss.

¹³ Diese und alle nachfolgenden Abbildungen, worauf das GeoGebra-Applet abgebildet ist, sind Screen-shots aus den Bildschirmaufnahmen zu gegebenem Zeitpunkt.

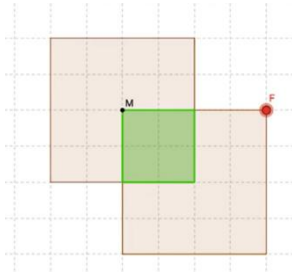


Abb. 17: A1, T1: Spezialfall „Quadrat“

Episode 3 - Exploration (00:46 - 01:11)

Bei der Bewegung des Quadrates um den Mittelpunkt (M) des anderen Quadrates stösst J. auf den Spezialfall „Dreieck“ (Abb. 18 links) und kommentiert (00:47) „ach so - ist es gleich“, was M. nach kurzer Zeit bestätigt.

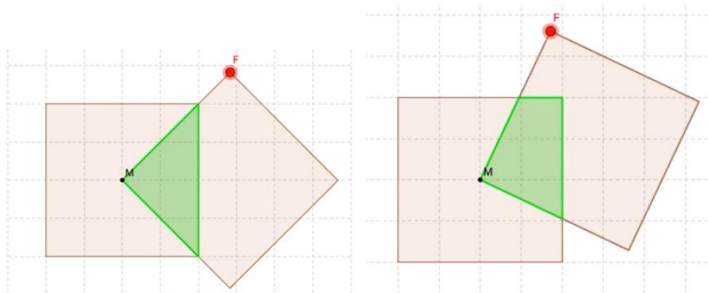


Abb. 18: A1, T1: links Spezialfall „Dreieck“, rechts Einzelfall

J. ergänzt seine Beobachtung (00:51): „Es ist immer ein Viertel.“ J. bewegt das Quadrat auf einen Fall dazwischen (Abb. 18 rechts). M. kommentiert (00:58): „Auch so! Aber es ist halt etwas krüppelig.“ J. wirkt noch nicht vollständig überzeugt, was wir aus einem lang gezogenem „jaaaaa....“ schliessen.

Episode 4 - Analyse (01:11 - 01:41)

M. stellt die Frage, ob es in der Aufgabenstellung Grössenangaben gäbe und schaut sich diese nochmals an. Beide Probanden lesen die Aufgabenstellung erneut durch. Nachdem sie festgestellt haben, dass keine Grössenangaben gegeben sind, fragt M. (01:32): „Muss man das dann mit Variablen machen, oder...?“ J. entgegnet dieser Frage mit der Erläuterung, dass man offenbar die Fläche untersuchen [„entdecken“] müsse. Er nimmt den Stift und das Dokumentationsblatt zur Hand und leitet dadurch die neue Phase ein - das *Schreiben*.

Episode 5 - Schreiben (01:41 - 02:57)

Ohne genauere Erläuterungen beginnt J. mit dem Skizzieren ihrer Entdeckungen. Er beginnt mit der Skizze für den Spezialfall „Quadrat“. Er schaut auf und bemerkt (02:01): „Begründen muss man es halt noch.“ J. schliesst seine Zeichnung ab. M. schaut ihm dabei zu.

Episode 6 - Exploration (02:57 - 04:01)

Mit der Aussage „so, jetzt müssen wir das noch begründen“ beendet J. den Schreibprozess. J. dreht das Quadrat langsam um das andere und macht immer wieder bei den Spezialfällen Halt. M. fordert ihn auf (03:26), den Spezialfall „Dreieck“ zu erzeugen [„mach es mal diagonal“]. M. erklärt J., wie man bei der grünen Fläche den Flächeninhalt über die Häuschen ermitteln kann [„zwei Ganze und vier Halbe, das gibt dann wieder vier Ganze“]. J. stimmt ihm zu, stellt das App-

let wieder auf einen anderen Fall (siehe Abb. 19) und erläutert, dass es sich auch dabei um vier Häuschen handeln muss. Er meint, dass nun eine Skizze notwendig sei und leitet so zu einem weiteren Schreibprozess über.

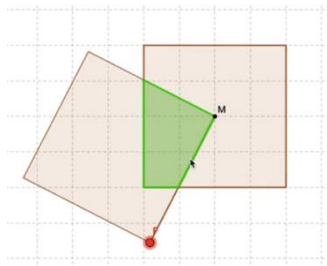


Abb. 19: A1, T1: Einzelfall

Episode 7 - Schreiben (04:01 - 07:24)

J. beginnt mit der Dokumentation. Er fertigt eine Skizze vom Spezialfall „Dreieck“ an. M. schaut ihm zu und dreht das Quadrat auf den Spezialfall. J. übergibt M. das Dokumentationsblatt. Dieser fertigt zur Skizze noch einen Antwortsatz an (Abb. 20).

Hier werden 2 Ganze und
 4 halbe ausgefüllt
 4 halbe $\rightarrow$ 2 Ganze = 4 ganze

Abb. 20: A1, T1: schriftliche Dokumentation eines Einzelfalls

J. dreht das Quadrat zu einem Fall zwischen den beiden Spezialfällen (wie bereits in Abb. 19 dargestellt), betrachtet den Bildschirm und schweigt.

Episode 8 - Planung / Ausführung mit gleichzeitigem Schreiben (07:24 - 09:23)

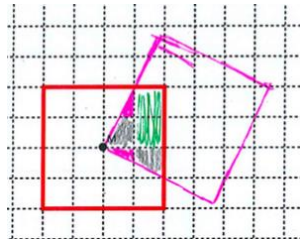


Abb. 21: A1, T1: Skizze zum Einzelfall

M. legt den Stift hin und schaut auf. J. möchte den Mittelpunkt verschieben; die Probanden stellen fest, dass dies jedoch nicht möglich ist. Dies könnte man auch als *Exploration* codieren - jedoch macht dies hier für uns keinen Sinn, da inhaltlich kaum weitergearbeitet wird und diese Episode lediglich wenige Sekunden andauert.

J. beginnt (07:24) den eingestellten Fall zu skizzieren (Abb. 21) und kommentiert: „So, das ist jetzt etwas komisch, aber...“ Er kommentiert, wie er die ganzen und angebrochenen Häuschen in der überdeckten Fläche kennzeichnet (Abb. 21). Der implizite (nicht geäußerte) *Plan* ist hier offenbar, den Flächeninhalt dieser Form anhand der Häuschen zu bestimmen und damit zu zeigen, dass dieser auch bei dieser Einstellung ein Viertel der Quadratfläche beträgt.

J. erklärt M., wie er den Flächeninhalt dieser Form ermitteln kann, und führt somit seinen Plan aus (*Ausführung*). Er dokumentiert seine eigene Erklärung gleichzeitig auf dem Dokumentati-

onsblatt (Abb. 22). M. hilft bei dieser Erklärung und stellt kurze Rückfragen wie „ist das ein Drittel oder ein Viertel?“. Da hier nicht bloss bereits geäußerte Erkenntnisse festgehalten, sondern neue Erkenntnisse bekannt gegeben werden, wird an dieser Stelle doppelt codiert: *Planung / Ausführung* und *Schreiben*.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ ganze} + \frac{3}{4} \text{ zweimal} \\ + \frac{1}{4} \text{ zweimal} = 4 \text{ Quadrate} \end{array}$$

Abb. 22: A1, T1: schriftliche Dokumentation eines Einzelfalls

Bei 09:07 beendet J. diese Erklärung, blättert und beginnt mit der Ergänzung von Skizzen und Worten bei bereits festgehaltenen Erkenntnissen. In diesem Moment endet die Phase der *Planung / Ausführung* und es handelt sich nur noch um eine einzeln codierte Phase des *Schreibens*. Kurz darauf legt J. den Stift weg und beendet den Schreibprozess.

Episode 9 – Exploration mit Unterbruch (09:23 - 10:45)

Beide Probanden betrachten das Applet auf dem Bildschirm; J. betätigt den Cursor. Sie betrachten stillschweigend nacheinander die Spezialfälle „Quadrat“ und „Dreieck“ und sind sich einig, dass „die Tatsache klar sei“, ihnen jedoch noch eine allgemeine Begründung fehle.

Bei 10:09 unterbricht die Versuchsleiterin den Problembearbeitungsprozess (hier wurde *Störung* codiert), indem sie ins Zimmer kommt und nachfragt, ob die Probanden bereits eine Lösung gefunden haben. Die Probanden erklären, dass sie noch nach einer Begründung suchen und noch etwas Zeit benötigen würden. Die Versuchsleiterin kündigt an, in wenigen Minuten wieder zu kommen.

Die Probanden betrachten wieder das Applet (10:28), bei welchem J. das eine Quadrat langsam um das andere bewegt.

Episode 10 - Verifikation (10:45 - 11:34)

Plötzlich kündigt M. an, eine Idee zu haben, wie er die Erkenntnisse begründen kann. Damit startet eine neue Phase - eine *Verifikation*. Er weist J. an, das Quadrat auf den Spezialfall „Dreieck“ zu legen und erklärt: „Hier schaut die Ecke hinein. Und auf der anderen Seite ist es immer vier lang. So ist es vier aneinander und sonst (Spezialfall „Quadrat“) hast du vier um die Ecke. Könnte das damit zu tun haben?“ Seine Beschreibung und seine Gestik lassen vermuten, mit welchen Argumenten er begründen möchte: Die Strecke (der Teil des Umfangs) des festen Quadrates, die vom anderen Quadrat überdeckt wird, ist immer vier Häuschen lang und somit ein Viertel des Gesamtumfangs. Somit ist bei jedem Fall ein Sektor zum Mittelpunkt überdeckt, der ein Viertel der Gesamtfläche beträgt. M. führt dies jedoch nur knapp aus; J. zögert mit einem Gegenargument. M. zeigt sich irritiert und bringt dies durch das Verziehen seines Gesichtes zum Ausdruck.

Episode 11 - Exploration mit gleichzeitigem Schreiben (11:34 - 12:41)

Es scheint, als hätte J. nicht verstanden, was ihm M. mitteilen wollte. Dies zeigt sich dadurch, dass er damit beginnt, über den Umfang der grünen Fläche zu diskutieren. Er meint, dass dieser beim Spezialfall „Dreieck“ länger ist als beim Spezialfall „Quadrat“. Beide Probanden beginnen mit dem Berechnen des (ganzen) Umfangs der grünen Fläche - auch M. kommt von seinem guten Ansatz der letzten Phase ab. Die Probanden befinden sich nun nicht mehr in einer Phase der

Verifikation sondern wieder in der *Exploration*. Sie entfernen sich vom eigentlichen Problem, äussern sich unsicher und widersprechen sich selbst.

Bei 11:45 kommen sie zum Schluss, dass der Umfang der grünen Fläche stets acht Häuschen betragen würde, was jedoch eine Fehlüberlegung darstellt (denn beim Spezialfall „Dreieck“ beträgt der Umfang vier Längen und vier Diagonalen eines Häuschens). J. beginnt währenddessen mit der Dokumentation - da während dem Schreibprozess inhaltlich weitergearbeitet wird, wird hier doppelt codiert (*Exploration* und *Schreiben*). Gemeinsam versuchen sie, ihre Idee auf das Papier zu bringen und den Umfang jeweils zu berechnen. Sie merken, dass etwas nicht korrekt ist, können ihre Idee aber nicht verbessern. J. äussert: „Ich kapier's nicht mehr.“ Mit der Äusserung „ja, ist ja egal“ von M. (12:33) wird der Problembearbeitungsprozess abgeschlossen. Gleich darauf kommt die Versuchsleiterin ins Zimmer und leitet die Besprechung der Aufgabe ein.

11.1.1.2 Tandem 4

Episode 1 - Lesen (00:00 - 01:07)

Die Versuchsleiterin erklärt, dass sie nach zehn Minuten wieder kommen würde. V. startet in den Prozess mit der Aufforderung, den Text durchzulesen. Nach einer kurzen Ablenkungsphase, in welcher sie über die Aufnahme sprechen, beginnen beide Probanden mit dem Lesen (00:27). D. liest vor: „Mit dem roten Punkt F... - Ach der hier!“ Er zeigt auf den Bildschirm.

D. sucht einen Stift und beschriftet das Dokumentationsblatt mit deren Namen. Beide Probanden lesen halblaut weiter.

V. fragt, was Bierdeckel seien. V.: „Sind das die Karten, die man unter das Glas stellt?“ Die beiden einigen sich darauf, dass es sich wohl um einen solchen Gegenstand handeln muss.

Episode 2 - Analyse (01:07 - 01:31)

„Also so halt.“ V. zeigt auf den Bildschirm und deutet darauf hin, dass die zwei Bierdeckel in der Aufgabenstellung so angeordnet sind, wie dies im Applet auf dem Bildschirm ersichtlich ist. Mit diesem Durchdringen der Aufgabenstellung startet eine neue Phase - die *Analyse*.

V. wundert sich und meint, dass dies gar nicht funktionieren würde. Sie nimmt die Maus in die Hand und beginnt, das Quadrat an der Ecke F zu bewegen. „Aha es ist immer gleich!“ lautet die spontane Äusserung von V. (01:28). D. stimmt ihr zu: „Es ist immer ein Viertel!“

Episode 3 - Exploration (01:31 - 01:58)

V. dreht das eine Quadrat langsam um das andere und macht beim Spezialfall „Dreieck“ (Abb. 23) Halt: „So auch?“

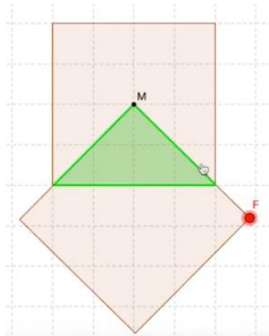


Abb. 23: A1, T4: Spezialfall „Dreieck“

D. erklärt: „Ja das siehst du ja. So, dann ist es immer ein Viertel.“ Er zeigt auf den Bildschirm. V. stimmt ihm zu. Sie dreht das Quadrat weiter um das andere und stoppt jeweils nickend bei den Spezialfällen „Quadrat“ und „Dreieck“. Die Probanden ermitteln anhand von Spezialfällen den Flächeninhalt der überdeckten Fläche. Dies ist eine heuristische Strategie, die nach Codiermanual (siehe Anhang C) ein klares Anzeichen für eine Phase der *Exploration* darstellt.

V. fragt, wozu ihre Erkenntnisse nun nützlich wären (01:51). D. meint, sie sollen diese zuerst einmal dokumentieren. Durch diese Aufforderung wird die Phase der *Exploration* beendet und eine neue Phase des *Schreibens* eingeleitet.

Episode 4 - Schreiben (01:58 - 02:58)

Nachdem sie kurz geklärt haben, wozu die Vorlagen für die Skizzen auf dem Dokumentationsblatt dienen, beginnt V. mit dem Schreiben. Gemeinsam formulieren sie ihre Erkenntnisse (Abb. 24).

- Das grüne Feld ist immer
 $\frac{1}{4}$ einer/der Karte

Abb. 24: A1, T4: Dokumentation der Erkenntnis

Episode 5 - Exploration¹⁴ (02:42 - 03:26)¹⁵

Während V. noch mit der Notation der Erkenntnis beschäftigt ist, beginnt D. mit einer *Exploration* (02:42). Er übernimmt die Steuerung des Applets und dreht das Quadrat im Kreis. Die kurze Nachfrage von V., ob sie einen Bruch notieren soll (02:45), beantwortet er mit „ja“, ohne den Blick vom Bildschirm zu lösen. Beim Zwischenkommentar „Was man auch noch schreiben kann...“ beendet V. den Schreibprozess (02:58) und schaut auf. D. erläutert seine nächste Entdeckung: „Es gibt immer einen Kreis, wenn du das rundherum drehst. Alle Eckpunkte - wenn man es dreht - geben immer einen Kreis. Schau, wenn du dem hier [deutet auf Punkt F hin] drehst.“ V. stimmt D. zu und ergänzt: „Es ist also immer mit zwei Häuschen Abstand.“ D. widerspricht - sie einigen sich darauf, dass der Abstand zwischen F und M vier Häuschen beträgt (03:20). V. wendet sich schliesslich wieder der Dokumentation zu.

Episode 6 - Schreiben mit einem Unterbruch der Exploration (03:26 - 07:34)

Die Probanden formulieren gemeinsam ihre Erkenntnis und V. hält diese auf dem Dokumentationsblatt schriftlich fest. Bis zum jetzigen Zeitpunkt haben die Probanden noch keine Skizzen angefertigt.

„Die Strecke MF hat immer einen Radius von vier Häuschen.“ V. stellt den Spezialfall „Dreieck“ ein und entgegnet: „Aber warte, so stimmt es ja nicht!“ Damit unterbricht sie die Phase des Schreibens und beginnt eine neue. Es wird für die Zeitspanne von 03:46 bis 04:05 *Exploration* codiert, da es sich hier um eine weite Suche im Problemfeld handelt. Die Beobachtung, dass die Strecke MF (die eine Quadratseite darstellt) immer gleich lang ist, hilft bei der Lösung des Problems kaum.

¹⁴ Die Probanden befinden sich in unterschiedlichen Phasen, darum startet die Phase, bevor die Schreibphase beendet ist.

¹⁵ Hier beginnt eine neue Phase für den Probanden D. während Probandin V. sich noch im Schreibprozess befindet. Deshalb wird für 02:42 bis 02:58 doppelt codiert: Schreiben und Exploration.

D. widerspricht V., übernimmt die Manipulation des Applets und beginnt zu erklären (vgl. Abb. 25): „Wenn du es so hast [Spezialfall „Quadrat“], dann sind es vier. Es bleibt immer gleich. Und wenn du es dann so hast [Spezialfall „Dreieck“], sind es immer noch vier.“

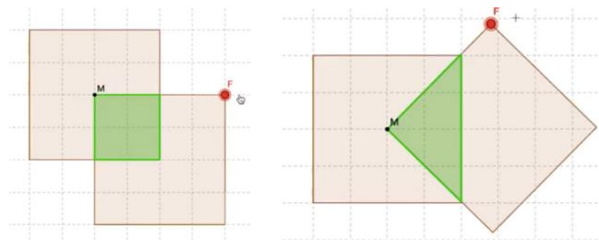


Abb. 25: A1, T4: links Spezialfall „Quadrat“, rechts Spezialfall „Dreieck“

V. stimmt D. zu und wendet sich wieder dem Dokumentationsblatt zu (04:05). Die kurze Phase der *Exploration* ist damit beendet und es beginnt wieder eine *Schreibphase*.

Die Probanden diskutieren verschiedene Formulierungen ihrer Erkenntnisse und einigen sich (04:38) auf „Linie MF = 4 Häuschen“, was V. in der Dokumentation schriftlich festhält. Die Probanden tauschen sich darüber aus, um welche Masseinheit es sich handelt und ob die vorgegebene Skizze in Zentimetern skaliert sei. Durch das Nachmessen mit dem Lineal merken sie jedoch, dass dies nicht der Fall ist und sie mit der Einheit „Häuschen“ arbeiten sollen (04:47 - 04:57).

V. beendet das Schreiben ihres Satzes und fragt, ob sie die anderen Erkenntnisse auch noch notieren müsse (05:08). Wieder formulieren sie gemeinsam und V. notiert die zweite Erkenntnis, dass sich alle Eckpunkte des einen Quadrates kreisförmig um den Mittelpunkt des anderen bewegen.

V. fragt sich, wozu der Platz weiter unten auf dem Dokumentationsblatt diene (06:35) und wendet sich nochmals dem Aufgabentext zu. Da diese Episode nur ganz kurz ist, wird hier keine eigene Phase codiert.

D. entgegnet, sie könnten noch eine Skizze anfertigen, damit das Blatt nicht ganz so leer scheint, und beginnt mit der Zeichnung. Er fertigt den Spezialfall „Quadrat“ an, wobei ihm V. zuschaut und zwischendurch hilft (vgl. Abb. 26).

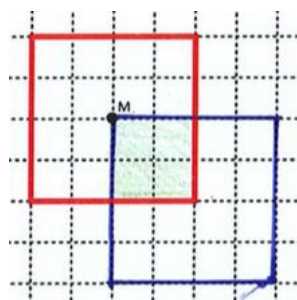


Abb. 26: A1, T4: Skizze Spezialfall „Quadrat“

Episode 7 - *Exploration* (07:35 - 08:54)

V. erwähnt, dass im Aufgabentext stünde, sie müssten die Grösse der grünen Fläche untersuchen. Sie hätten bisher auch über andere Eigenschaften des Applet diskutiert. Sie dreht das Quadrat langsam um das andere. Beide beobachten den Bildschirm. Beim Spezialfall „Dreieck“ stoppt sie und sagt (07:51): „Ach schau, wir können über die Form sprechen!“

V. erkennt, dass die grüne Fläche beim Spezialfall „Dreieck“ die Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks hat (08:01). V. dreht das Quadrat weiter auf den Spezialfall „Quadrat“ und beschreibt die grüne Fläche als ein solches (08:26). Sie ergänzt: „Und dazwischen sind es einfach jegliche Vierecke.“ Beim weiteren Drehen am Applet (vgl. Abb. 27) stellt sie ausserdem fest, dass die grüne Fläche nur in vier Einzelfällen (Spezialfall „Dreieck“) ein Dreieck darstellt, ansonsten jeweils ein Viereck ist. D. stimmt ihr zu und fragt, ob V. wieder das Schreiben übernimmt.

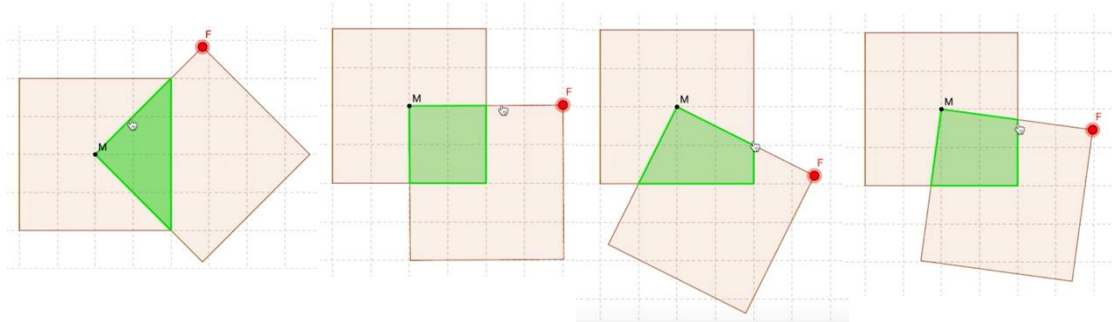


Abb. 27: A1, T4: Mögliche Formen der überdeckten Flächen

Auch in dieser Episode suchen die Probanden weit im Problemfeld. Es ist kein zielstrebiges Verhalten zu erkennen; ihre Erkenntnisse gewinnen sie durch (systematisches) Ausprobieren. Deshalb wird die ganze Phase wieder mit *Explorieren* codiert.

Episode 8 - Schreiben mit Unterbrüchen (08:54 - 12:52)

Die Probanden formulieren gemeinsam ihre Erkenntnis und diskutieren über den Begriff des allgemeinen Vierecks. Da sie sich nicht sicher sind, wie man dieses benennt, wählen sie den Begriff „unbestimmtes Viereck“ aus. V. beginnt mit dem Schreiben.

Der Schreibprozess wird zwischen 10:17 und 10:24 unterbrochen. Die Versuchsleiterin betritt das Zimmer und fragt nach, ob die Probanden das Problem bereits gelöst hätten. Die Probanden verneinen. Die Versuchsleiterin verlässt den Raum wieder und die Probanden setzen die gemeinsame Formulierung fort.

Die Probanden beenden den Schreibprozess und fragen sich, was sie nun tun sollen. Nach einigen abschweifenden Wortwechseln (wird als *Transition*¹⁶ codiert) einigen sie sich darauf, noch eine weitere Skizze zu erstellen, da auf dem Dokumentationsblatt noch viel Platz übrig wäre. V. zeichnet darauf den Spezialfall „Dreieck“. Schliesslich betritt die Versuchsleiterin wieder den Raum (12:48) und die Probanden beenden das Skizzieren und somit den Problembearbeitungsprozess.

¹⁶ In dieser kurzen Episode zwischen 11:48 und 12:08 wird inhaltlich nicht weitergearbeitet, es wird nichts festgehalten und es finden auch keine organisatorischen Tätigkeiten statt. Die Episode kann keiner Phase zugeteilt werden; deshalb wird hier Transition codiert.

11.1.1.3 Tandem 5

Episode 1 - Analyse (00:05 - 00:33)

Die Probanden steigen in den Problembearbeitungsprozess ein, ohne die Aufgabe nochmals für sich durchzulesen. Proband N. gibt Probandin M. die Anweisung, das Quadrat im Applet zu bewegen, was diese auch tut. Daraufhin behauptet N. (00:13): „Theoretisch sollte es immer gleich sein. Egal, wie man es verschiebt.“ Nach dieser spontanen Äusserung zur Lösungsangabe, die mit der Phase *Analyse* codiert wird, betrachten die Probanden noch den Spezialfall „Dreieck“ und überprüfen, ob hier der Flächeninhalt auch gleich ist (ohne eine Angabe zur relativen Grösse der grünen Fläche zur Quadratfläche). Hier hätte auch *Explorieren* codiert werden können. Da es sich aber um eine sehr kurze Episode handelt, wurde darauf verzichtet.

Episode 2 - Schreiben (00:33 - 01:23)

Gemeinsam formulieren die Probanden ihre Erkenntnis. M. notiert den Satz auf dem Dokumentationsblatt. N. wirft ein: „Jetzt ist die Frage, wieso.“ Während M. am Schreiben ist, wartet N. ohne sich zu äussern; er blickt jedoch immer wieder kurz auf den Bildschirm.

Episode 3 - Exploration (01:23 - 01:34)

„Und weshalb ist das jetzt so?“, fragt N. M. antwortet: „Vielleicht, weil M immer am gleichen Punkt ist.“ N. entgegnet darauf, dass die Sache klar wäre, wenn das bewegliche Quadrat um den Mittelpunkt eines Kreises rotieren würde, dies aber im vorliegenden Fall etwas komplizierter sei. Diese Variation der Aufgabe stellt eine *Exploration* dar (vgl. Abschnitt 7.1.6.2).

Episode 4 - Planung / Ausführung (01:35 - 01:58)

M. bewegt (ohne Anweisung oder Äusserung) das eine Quadrat ganz langsam um das andere. Beide Probanden beobachten die grüne Fläche ganz genau. Dann stellt N. fest: „Weil auf der einen Seite gehen Feldchen weg. Also Teile von Feldchen. Und auf der anderen Seite kommen genau so viele wieder hinzu. [...] Das heisst, was auf der einen Seite abnimmt, kommt auf der anderen Seite wieder hinzu.“ M. stimmt ihm zu.

Die Manipulation am Applet und die genaue Beobachtung stellen ein zielgerichtetes Verhalten dar. Es handelt sich dabei nicht um ein Explorieren. Die Probanden finden eine klare und korrekte Begründung. Deshalb wird diese Phase als *Planung / Ausführung* und nicht als *Exploration* codiert.

Episode 5 - Transition (01:59 - 02:06)

Die Probanden fragen sich, wie sie ihre Erkenntnisse formulieren sollen. Sie kommen kurz vom Thema ab - es handelt sich aber nicht um eine Abschweifung; die Episode ist zu kurz, um eine eigene Phase darzustellen. Deshalb wird hier *Transition* codiert.

Episode 6 - Schreiben (02:07 - 05:47)

Die Probanden formulieren gemeinsam ihre Erkenntnisse. Sie einigen sich darauf, mit der Skizze zu beginnen. M. übernimmt die Dokumentation, während N. ihr Anweisungen gibt und ihr beim Skizzieren hilft. M. bewegt das Quadrat im Applet (03:12), was als Hilfestellung für die Dokumentation dient (vgl. Abb. 28).

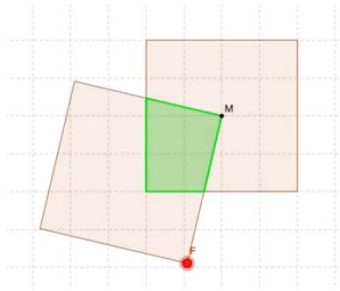


Abb. 28: A1, T5: Einzelfall

M. bekundet Mühe, die Erkenntnis, dass genau so viele Häuschen auf der einen Seite hinzu kommen, wie auf der anderen Seite weg gehen, in einer Skizze festzuhalten. N. hilft ihr. Trotzdem machen sie einen Fehler. Anstatt dass das Quadrat von der Ausgangsposition um den Mittelpunkt gedreht wird, kippen sie das Quadrat zu einem Rhombus (siehe Skizze Abb. 29). Die Absicht der Skizze erscheint klar - die Umsetzung ist hingegen missglückt.

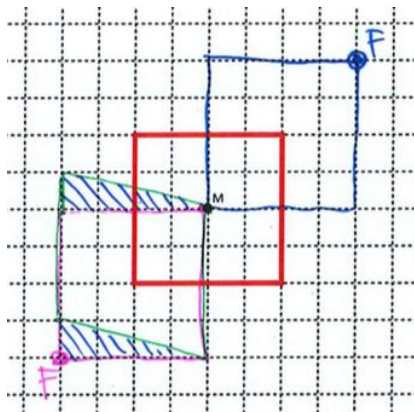


Abb. 29: A1, T5: (fehlerhafte) Skizze der Probanden zur Illustration ihrer Erkenntnisse

Inhaltlich wird in dieser Phase zwar nicht weitergearbeitet, trotzdem beschäftigen sich die Probanden vertieft mit der „Lösung“ ihres Problems.

Nach der Fertigstellung der Skizze, arbeiten die Probanden an einer treffenden Formulierung für diese Begründung, die M. schliesslich notiert (siehe Abb. 30).

Das grüne Feld ist
immer gleich gross.
Wenn man den Punkt
F bewegt nimmt das
grüne Feld auf der
einen Seite zu und auf
der anderen ab. Wenn

Abb. 30: A1, T5 schriftliche Dokumentation

Episode 7 - Verifikation (05:48 - 07:05)

Die Probanden fragen sich, wie sie diese Begründung noch genauer beschreiben oder kontrollieren können. N. meint, sie sollen sich noch auf die Tatsache, dass der Mittelpunkt nicht beweglich ist, konzentrieren. Sie überprüfen kurz, ob sich der Mittelpunkt M tatsächlich nicht verschieben

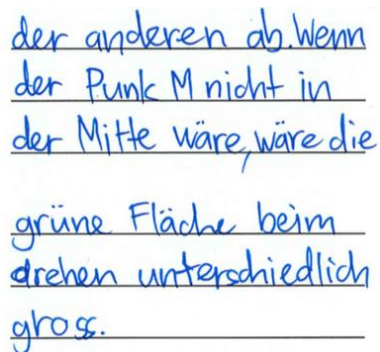
lässt (06:05). N. sagt: „Du könntest noch schreiben: Das grüne Feld bleibt gleich, weil sich der Punkt M nicht bewegt.“

M. meint: „Das ist eigentlich alles, oder?“ N. antwortet, dass es nicht mehr zu sagen gäbe. Schliesslich entscheiden sie sich dafür, dass die Tatsache, dass ihre Erkenntnis nicht gelten würde, wenn der Mittelpunkt nicht fest wäre, wichtig ist. M. deutet auf den Bildschirm und entgegnet N.: „Ach ja stimmt, dann [wenn der Mittelpunkt nicht in der Mitte wäre] wäre die Fläche ja kleiner.“

Die Probanden verändern in dieser Episode die Bedingungen der Aufgabenstellung. Da sie bereits eine Lösung (in diesem Fall die Begründung ihrer Beobachtungen) gefunden haben und die Absicht äussern, diese noch genauer zu beschreiben, wird hier eine *Verifikation* codiert.

Episode 8 - Schreiben (07:05 - 08:10)

M. notiert die Bedingung, dass das Quadrat um den Mittelpunkt M gedreht werden muss (und nicht um einen anderen Punkt im stehenden Quadrat). N. schaut währenddessen im Zimmer herum, beobachtet M. bei der Notation und hilft gelegentlich bei der Formulierung (Abb. 31).



der anderen ab. Wenn
der Punkt M nicht in
der Mitte wäre, wäre die
grüne Fläche beim
drehen unterschiedlich
gross.

Abb. 31: A1, T5: schriftliche Dokumentation

Episode 9 - Verifikation (07:58 - 09:00¹⁷)

Während M. noch den Prozess des Schreibens abschliesst, kommt N. eine weitere Idee: „Kommt es darauf an... Ist es egal, wenn sie nicht gleich sind, die Quadrate? Ich glaube schon, oder?“ M. ist noch immer mit der Fertigstellung des Satzes von vorhin beschäftigt und antwortet nicht (08:04). Daraufhin beantwortet N. seine Frage selbst und bemerkt, dass dies nicht entscheidend sei.

M. stellt ihre Notizen fertig und schaut auf. N. meint, sie könnten noch überprüfen, ob ihre Erkenntnis (dass die überdeckte Fläche stets gleich gross ist) auch bei einer anderen geometrischen Form, dem Rhombus, gelten würde. Somit äussert N. explizit die Absicht, ihre Erkenntnis in einem abgeänderten Kontext zu überprüfen. Deshalb wird hier die Phase *Verifikation* codiert.

Die Probanden kommen jedoch nicht zu einem eindeutigen Schluss, ob diese Abänderung der Bedingungen eine Auswirkung auf ihre Erkenntnis hat. Deshalb einigen sie sich darauf, dass der Problembearbeitungsprozess beendet ist (09:00).

¹⁷ M. befindet sich noch in der Phase des Schreibens, während N. bereits weiterdenkt. Deshalb wird zwischen 07:59 und 08:10 doppelt codiert: *Schreiben* und *Verifikation*.

11.1.2 Vergleich der Problembearbeitungsprozesse

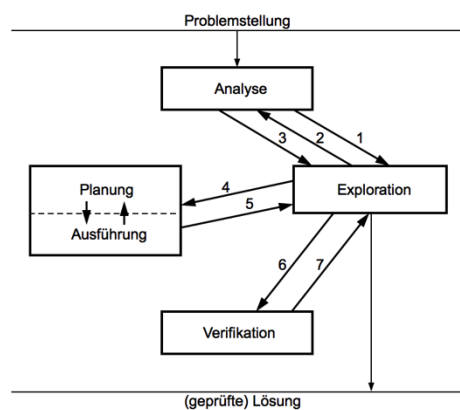


Abb. 32: A1, T1: Prozessverlauf

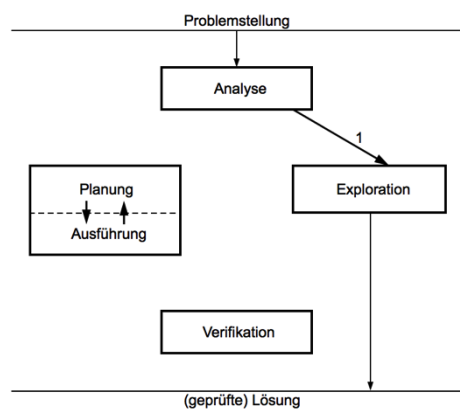


Abb. 33: A1, T4: Prozessverlauf

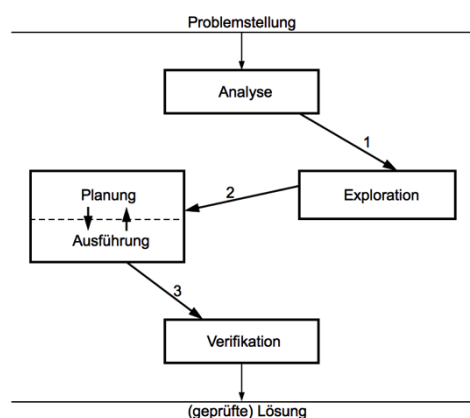


Abb. 34: A1, T5: Prozessverlauf

11.1.2.1 Einstieg

Alle drei Tandems sind bei der Aufgabe „das drehende Quadrat“ mit der Phase *Analyse* in den Problembearbeitungsprozess eingestiegen. Zudem haben sie alle schon zu Beginn des Prozesses die These aufgestellt, dass der Flächeninhalt der grünen (überdeckten) Fläche stets ein Viertel einer Quadratfläche beträgt. Der nächste Schritt nach dieser spontanen Äusserung (*Analyse*) war bei allen drei Tandems ein Phasenübergang in die *Exploration*. Danach unterschieden sich dann die Bearbeitungsprozesse in Anzahl und Reihenfolge der Phasen stark.

11.1.2.2 Abschluss

Das Beenden des Problembearbeitungsprozesses erfolgte bei zwei Tandems nach einer Phase der *Exploration*:

Tandem 1 hatte sich mit der (ansatzweise richtigen) Begründung über den gleichbleibenden Teilumfang des stehenden Quadrates nicht zufrieden gegeben und suchte explorativ nach einer treffenderen Begründung. Da dies ihnen nicht gelang, entschieden sie sich, den Bearbeitungsprozess abzuschliessen.

Tandem 4 beendete den Problembearbeitungsprozess nach einer längeren Phase der *Exploration*, in welcher sie sich von der eigentlichen Aufgabenstellung entfernt haben, indem sie die Form der grünen Fläche untersuchten. Ohne nach einer Begründung zu suchen, beendeten sie den Prozess nach dieser *Exploration*. Tandem 5 hat den Prozess nach einer *Verifikation* beendet und erlangt eine *geprüfte* und begründete Lösung des Problems.

11.1.2.3 Phasenwechsel

Wie bereits erwähnt unterscheiden sich die Bearbeitungsprozesse der drei Tandems in Anzahl und Reihenfolge der Phasen sehr. Während Tandem 1 und 5 jeweils sämtliche Phasen des Phasenmodells von Rott (2013) passiert hatten, bewegten sich die Probanden von Tandem 4 nur in den Phasen *Analyse* und *Exploration*, während sie die Phasen *Planung / Ausführung* und *Verifikation* nicht durchliefen.

Während die Tandems 4 und 5 eher wenige Phasenwechsel vornahmen, sprang Tandem 1 häufiger zwischen Phasen hin und her. Interessant scheint bei diesem Tandem auch, dass die Phase der *Analyse* mehrfach durchlaufen wurde.

Der Problembearbeitungsprozess von Tandem 5 verläuft linear, wie dies Pólya (1945) vorgesehen hatte. Die Probanden durchliefen sämtliche Phasen des Modells (teilweise unterbrochen durch einen Schreibprozess) einmal, bis sie zu einer geprüften Lösung gelangten.

Auffällig scheint bei der Betrachtung der Phasenübergänge aller drei Tandems, dass Phasenübergänge von der *Exploration* zu allen anderen Phasen (auch zur Lösung) vorkommen und umgekehrt.

11.1.2.4 Zeitlicher Verlauf

Wie schon die Grafik des Prozessverlaufs gezeigt hat, kann man auch im zeitlichen Ablauf (Abb. 35) erkennen, dass Tandem 1 mehrere, kürzere Phasen durchlaufen hat. Der Schreibprozess beanspruchte während dem Prozessverlauf am meisten Zeit (7min 23s von insgesamt 12min 41s). Danach folgen die *Exploration* (3min 41s), die *Planung / Ausführung* (2min 17s), die *Verifikation* (49s) und die *Analyse* (49s). Nebst kurzen Überlappungen der Phasen bewegten sich die Probanden einmal während etwas mehr als zwei Minuten nicht in denselben Phasen. Während ein Proband noch mit dem *Schreibprozess* beschäftigt war, arbeitete der andere inhaltlich weiter (*Planung / Ausführung*).

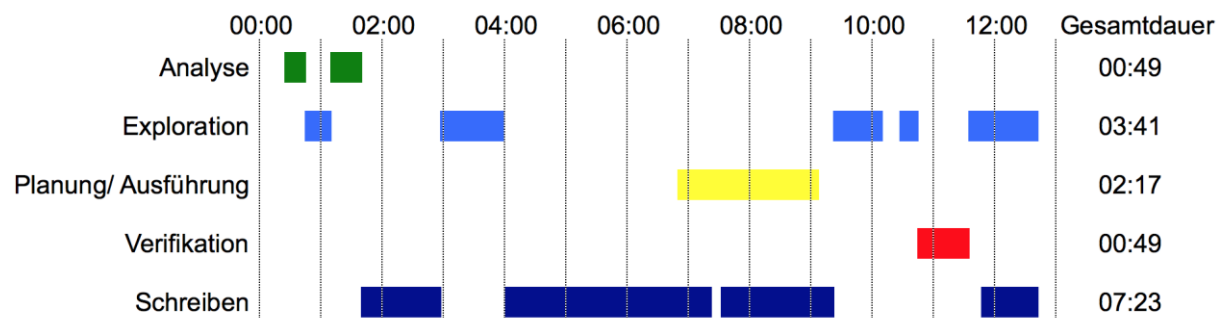


Abb. 35: A1, T1: zeitlicher Verlauf

Tandem 4 durchlief nebst einer kurzen Phase der *Analyse* (24s) mehrere kürzere Phasen der *Exploration*, die jeweils von einem *Schreibprozess* unterbrochen wurden (siehe Abb. 36). Auch bei diesem Tandem nahm der *Schreibprozess* klar am meisten Zeit in Anspruch (8min 16s von insgesamt 12min 52s) und erfolgte zeitweise (vgl. 03:00) auch parallel zur *Exploration*. Überlappungen von Phasen konnten jedoch bis auf diese Ausnahme nicht beobachtet werden. Aus der Grafik wird auch deutlich, dass sehr viel Zeit in die *Exploration* investiert wurde (2min 48s).

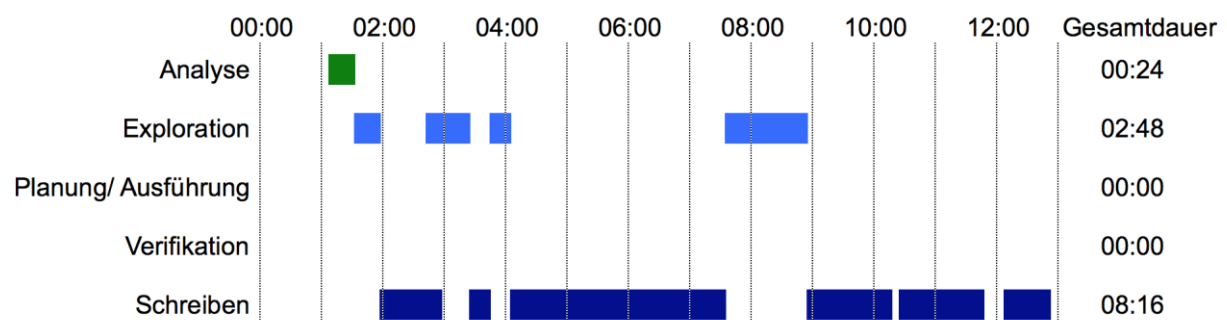


Abb. 36: A1, T4: zeitlicher Verlauf

Tandem 5 beendete den Problembearbeitungsprozess am schnellsten (fast vier Minuten vor den anderen beiden Tandems). Einzelne Phasen des Modells wurden lediglich einmal durchlaufen (siehe Abb. 37) - Rückschritte wurden keine beobachtet. Interessant ist bei diesem Tandem zudem, dass die Probanden nach zwei Minuten zu einem befriedigenden, begründeten Ergebnis gelangt sind, das später nach einem langen Schreibprozess noch gründlich verifiziert wurde.

Auch bei Tandem 5 nahm der *Schreibprozess* sehr viel Zeit in Anspruch (5min 25s von insgesamt 9min). Im Vergleich dazu nimmt die *Analyse* 28s, die *Exploration* 11s und die *Verifikation* 2min 19s ein. Das Festhalten von Erkenntnissen und Begründungen erfolgte bei diesem Tandem im Vergleich zu den beiden anderen Tandems geordneter und am Stück.

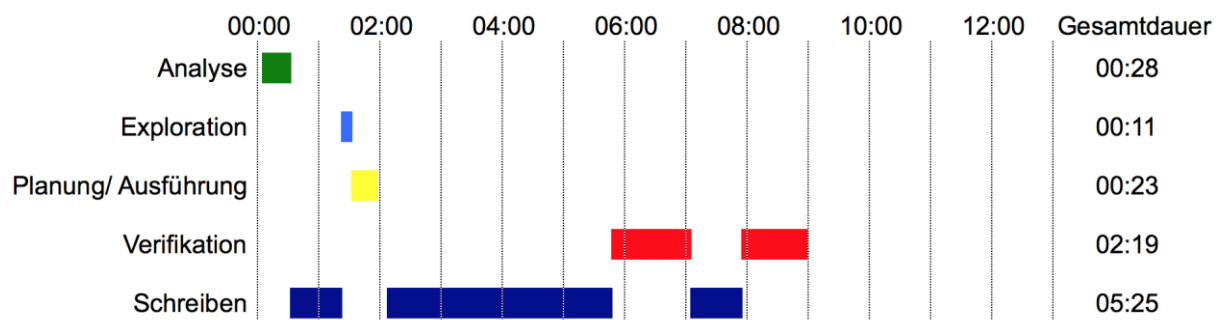


Abb. 37: A1, T5: zeitlicher Verlauf

11.2 Aufgabe 2: Vierecke aus zwei Dreiecken

Auch bei der zweiten Aufgabe werden die einzelnen Problembearbeitungsprozesse der drei Tandems zuerst einzeln dokumentiert. Die Dokumentation erfolgt chronologisch nach den identifizierten Episoden geordnet. Anschliessend werden die Phasendurchläufe und die zeitlichen Verläufe der einzelnen Tandems miteinander verglichen.

11.2.1 Beschreibung der Problembearbeitungsprozesse

Vor Beginn der Videoaufnahmen zur Aufgabe 2 wurde den Probanden das Setting mit der Problemstellung, dem Applet und den Dokumentationsblättern erklärt. Ausserdem wurde die Aufgabenstellung von der Versuchsleitung bereits ein erstes Mal vorgelesen.

11.2.1.1 Tandem 1

Episode 1 - *Planung / Ausführung* (00:05 - 00:27)

J. steigt in den Problembearbeitungsprozess ein, indem er kurz kommentiert, dass einige Figuren - unter anderem das Quadrat - einfach zu erzeugen sind. J. übernimmt die Steuerung am Applet. Er äussert den „Plan“ mit dem Dreieck und seinem Spiegelbild ein Quadrat zu erzeugen. Er geht dabei äusserst zielstrebig vor (siehe Abb. 38): Er platziert zuerst die obere Ecke auf einen Gitternetzpunkt auf der Spiegelachse, nimmt dann die unterste Ecke, platziert diese auf der Spiegelachse sechs Häuschen weiter unten und setzt die mittlere Ecke genau in der Mitte der anderen beiden Ecken drei Häuschen von der Achse entfernt ab.

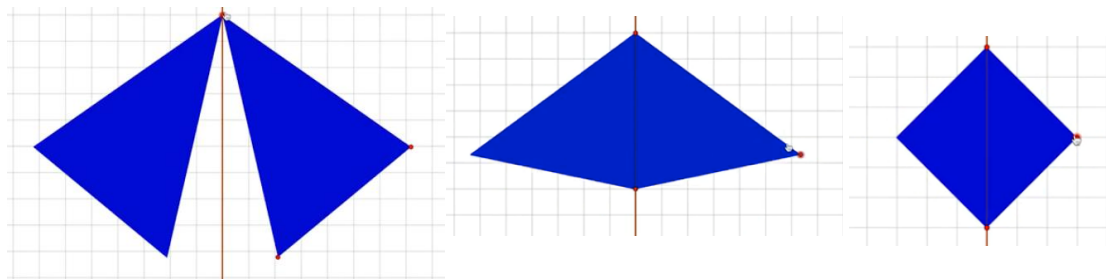


Abb. 38: A2, T1: Standbilder bei der Erzeugung des Quadrates

Wegen der Äusserung der Absicht und der zielstrebigten Ausführung wird hier nicht *Exploration*, sondern *Planung / Ausführung* codiert.

Episode 2.1 - *Schreiben* (00:27 - 02:00)

Die Probanden entscheiden sich, ihr Teilergebnis zu dokumentieren. J. nimmt das Dokumentationsblatt und beginnt mit der Skizze und der Beschreibung.

Episode 2.2 - *Planung / Ausführung* (00:44 - 00:55)¹⁸

Während J. noch mitten im Schreibprozess ist, wendet sich M. kurz zu der Aufgabenstellung (00:43) und beginnt begleitet von der Aussage „ein Rhombus ist ja uh einfach“ mit dem Erzeugen eines Rhombus. Dazu zieht er an der mittleren Ecke des Quadrats horizontal nach rechts. Auch diese Tätigkeit zeigt das zielstrebigte Handeln, das in der Phase der Planung / Ausführung notwendig ist.

J. ist weiterhin mit dem Notieren des Quadrates beschäftigt. M. schaut ihm dabei zu. Die beiden Probanden sprechen während dieser Zeit nicht miteinander.

Kurz vor der Vollendung des ersten Schreibprozesses weist J. seinen Partner an, die nächste Figur zu erzeugen (01:55).

Episode 3 - *Planung / Ausführung* (02:00 - 02:30)

M. erläutert, dass er den Rhombus bereits erstellt habe. Doch J. wirkt noch nicht überzeugt und korrigiert. Er zieht die mittlere Ecke etwas mehr nach links. Bereits der Rhombus, den M. erzeugt hatte, war korrekt. J. hat jedoch einen anderen erstellt und meint: „So ist es gleichseitig - so ist es schöner!“

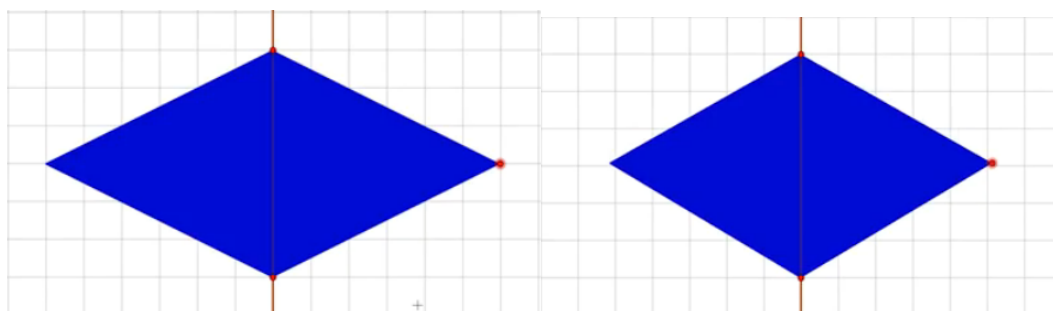


Abb. 39: A2, T1: Links der Rhombus von M., rechts der Rhombus von J.

M. lässt sich von der Handlung von J. aus dem Konzept bringen und glaubt, sein erster Rhombus sei falsch gewesen. J. erklärt M., dass bei beiden Rhomben alle Seiten gleich lang und somit beide

¹⁸ Die Episode 2.2 Planung / Ausführung wird nur von Proband M. bestritten. Diese findet gleichzeitig mit der Phase des Schreibens, in der sich Proband J. befindet, statt. Der Einzug soll visuell verdeutlichen, dass sich diese Phase 2.2 mitten in der Schreibphase befindet.

Rhomben sind. Er zeigt auf dem Bildschirm (02:23), dass die seitliche Ecke horizontal verschoben werden kann und die Seiten immer gleich lang sind.

Episode 4.1 - Schreiben (02:31 - 03:26)

Wieder übernimmt J. die Dokumentation der gewonnenen Erkenntnisse. M. schaut ihm wieder zu. J. formuliert seinen Antwortsatz (siehe Abb. 40). M. stimmt ihm zu. Er erwähnt, dass nun in der Dokumentation nicht genau derselbe Rhombus abgebildet sei wie auf dem Computer.

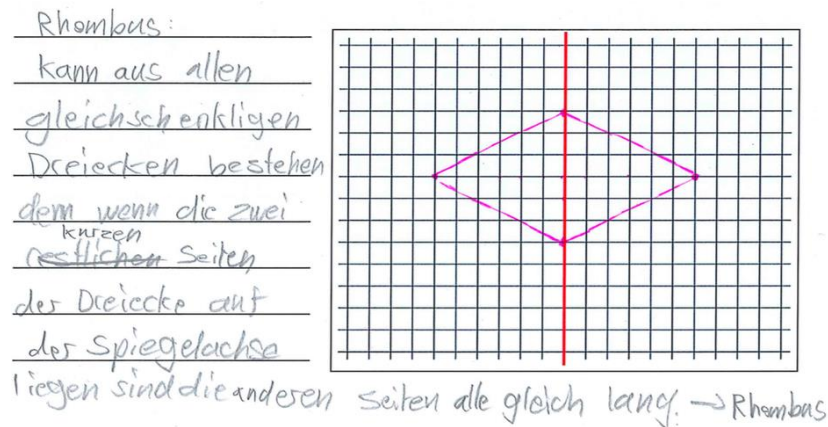


Abb. 40: A2, T1: Dokumentation des Rhombus

Episode 4.2 - Analyse (03:26 - 03:36)

M. zeigt auf das Aufgabenblatt und behauptet spontan: „Das geht aber nicht!“ Kurz darauf wird klar, dass er damit das Rechteck meint. J. unterbricht den Schreibprozess und widerspricht ihm mehrfach. Diese spontanen Äußerungen werden als *Analyse* codiert.

Episode 4.3 - Exploration (03:36 - 04:32)

Während sich J. wieder der Dokumentation des Rhombus widmet (siehe Abb. 40 oben), verschiebt M. die Eckpunkte des Dreiecks im Applet. Wie sich später herausstellt, versucht er, ein Rechteck zu erstellen. Er geht dabei nicht zielstrebig vor; er „probelt“. Deshalb wird hier *Exploration* codiert. Inzwischen hat er ein Drachenviereck erstellt, worauf er jedoch nicht eingeht. M. fragt seinen Partner, wie er die Figur erstellen möchte (03:54). J. beendet den Schreibprozess, schaut auf, übernimmt die Kontrolle über das Applet und beginnt mit ausprobieren. Bei der linken Figur in Abbildung 41 glaubt er zu wissen, wie er daraus ein Rechteck erstellen kann. Nach der Verschiebung der untersten Ecke (linke Figur in Abbildung 41) merkt er jedoch, dass diese Absicht nicht funktioniert. Die beiden Probanden kommen zum Schluss, dass man das Rechteck mit den vorliegenden Bedingungen nicht erzeugen kann. J. stellt fest, dass das Rechteck mit zwei Spiegelachsen möglich wäre.

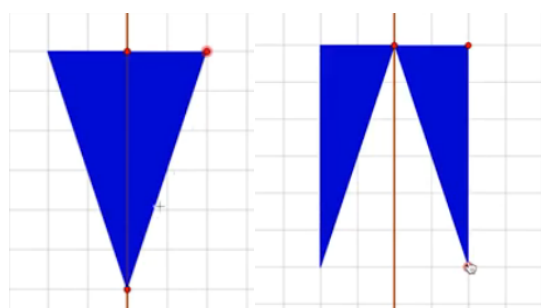


Abb. 41: A2, T1: Figuren beim Versuch, das Rechteck zu erstellen

Episode 5 - *Planung / Ausführung* (04:32 - 05:08)

M. erwähnt, dass das Drachenviereck hingegen ginge (04:32). M. bedient die Maus und stellt ein Drachenviereck dar. Da M. bereits beim Versuch ein Rechteck zu erstellen den Drachen gefunden hat, kann man hier von einem zielgerichteten Verhalten sprechen und eine Phase *Planung / Ausführung* codieren.

M. erzeugt einen Drachen; J. gibt Anweisungen, um ein „schöneres“ Drachenviereck zu erstellen und übernimmt (04:45) dann selber die Bedienung des Applet. Als Zwischenschritt des Prozesses erscheint ein Rhombus. Schliesslich haben die Probanden ein Drachenviereck, das beide als „schön“ betiteln können (Abbildung 42).

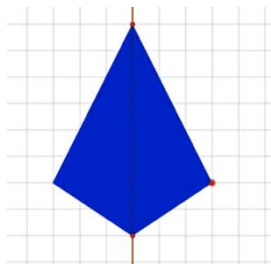


Abb. 42: A2, T1: Screenshot vom „schönen“ Drachenviereck

Episode 6.1 - *Schreiben* (05:08 - 08:26)

J. widmet sich wieder seiner Dokumentation; M. sitzt schweigend daneben. Wie sich kurz darauf herausstellt (J. blättert dann die Seite um), dokumentiert J. zu diesem Zeitpunkt noch immer den Rhombus. M. fragt J., ob er den Drachen noch brauchen würde (06:09). Nachdem M. die Figur bereits verändert hat, bemerkt J. (06:19), dass er den Drachen doch noch brauchen würde. So stellt M. wieder den Drachen dar und wartet.

J. blättert die Seite um und hat damit die Dokumentation des Rhombus offenbar beendet (06:34). Er übergibt M. das Dokumentationsblatt, damit dieser das Drachenviereck dokumentieren kann.

Episode 6.2 - *Verifikation* (06:50 - 07:12)

Während M. schreibt, verändert J. die Figur im Applet. Er bewegt die seitliche Ecke des Drachens hoch und hinunter. „Es kann aus allen Dreiecken bestehen, solange sie nicht gleich [-seitig, -schenklig] sind.“

Mit dieser Aussage konkretisiert J., wie der Drachen gebildet werden kann. Dieses Erkenntnis hat den Charakter einer Kontrolle und die Phase wird deshalb als *Verifikation* codiert.

M. ist noch immer mit der Skizze des Drachens beschäftigt. J. hilft ihm mit Anweisungen, genau denjenigen Drachen zu skizzieren, den sie auf dem Bildschirm erstellt haben. J. beginnt zu diktieren (07:36): „Eben, es kann aus allen Dreiecken bestehen, sofern sie nicht gleichseitig oder gleichschenklig sind.“ M. notiert diesen Satz auf dem Dokumentationsblatt.

Episode 7 - *Exploration* (08:17 - 10:20)

Während M. noch in den letzten Zügen des Schreibens ist, beginnt J. die Figur zu verändern und geht somit in die Phase der *Exploration* über. Die Probanden stellen fest, dass sich nicht alle Eckpunkte auf derselben Seite der Spiegelachse befinden müssen (Abb. 43).

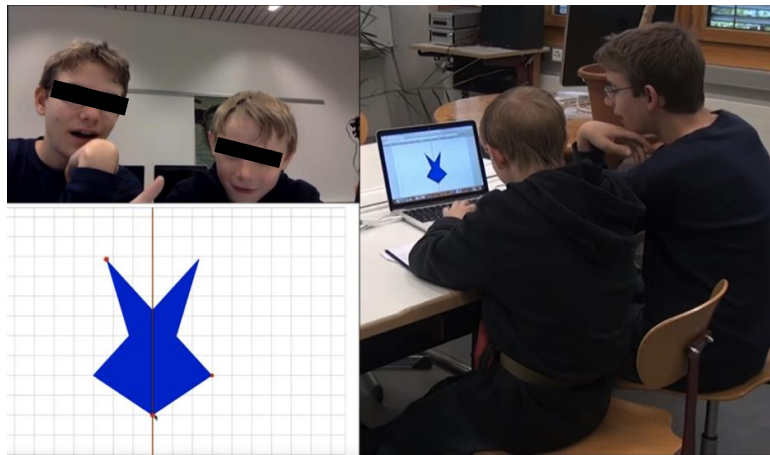


Abb. 43: A2, T1: links Proband J. und rechts Proband M.

Die Probanden wittern darin die Chance, das Rechteck erstellen zu können. Bei der linken Form in Abbildung 44 ruft M. erstaunt: „Das Rechteck!“ J. zieht an den Ecken des Dreiecks und versucht, ein Rechteck zu erstellen. „Ouh“ lautet sein Kommentar, als er bei der rechten Figur in Abbildung 44 merkt (08:52), dass es wohl doch nicht funktioniert.

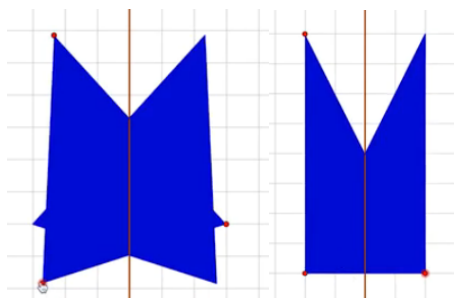


Abb. 44: A2, T1: links Hoffnung auf das Rechteck, rechts Erkenntnis, dass es nicht funktioniert

Die Probanden sind offensichtlich verwirrt, welche Formen entstehen, wenn eine Ecke auf der anderen Seite der Spiegelachse liegt. Sie versuchen weiterhin, das Rechteck zu erzeugen.

J. nimmt eine nächste Figur in Angriff (09:40): „Das Parallelenviereck.“ Er erstellt nahezu ein Rhombus und versucht eine Ecke so zu verschieben, dass die Seiten unterschiedlich lang werden. Sie probieren einiges aus, entdecken wieder sternförmige Formen und kommen dann zum Schluss, dass man das Parallelenviereck so nicht darstellen kann (10:12).

Episode 8 - Verifikation (10:20 - 11:20)

„Doch, doch, ich habe eine Regel gefunden“, lautet M.'s Wechsel in die Phase der *Verifikation*. „Im Viereck muss es eine Spiegelachse haben und auf beiden Seiten muss es gleich aussehen.“ J. willigt ein und versucht zu ergänzen. Die Probanden diskutieren, über die korrekten Bedingungen, die eine Vierecksform erfüllen muss, damit man sie in diesem Setting erstellen kann:

J.: „Aber sie dürfen nicht dreh.... Wie sagt man dem?“

M.: „Ein Drehmittelpunkt? Ist das das?“

J.: „Jaa... sie dürfen nicht drehgespiegelt sein.“

M.: „Jaa...“

J.: „Ähm warte schnell.“

M.: „Aber der ist auch drehgespiegelt.“ M. deutet auf das Quadrat. „Sie dürfen schon, aber...“

J.: „Sie dürfen achsensymmetrisch sein...“

M.: „Sie *müssen*!“

J.: „Sie müssen achsensymmetrisch sein, aber sie können nicht. Sie können zwar... [...] Sie müssen auf beiden Seiten gleich aussehen und achsensymmetrisch sein und nicht drehsymmetrisch.“

M.: „Ja logisch. Wenn es auf beiden Seiten gleich aussieht, dann ist es achsensymmetrisch.“

J.: „Ja, aber so sieht es *eigentlich* auch auf beiden Seiten gleich aus. Aber es ist halt drehsymmetrisch. Und darum sieht es nicht gleich aus, aber es sind die gleichen Dreiecke. - Schreib' das einmal auf!“

Die Probanden haben ein Lösungskriterium - die Achsensymmetrie - herausgefunden, sind sich jedoch in der Definition von Achsen- und Drehsymmetrie nicht ganz einig.

Episode 9 - Exploration mit gleichzeitigem Schreiben (11:21 - 12:05)

M. beginnt die neuen Erkenntnisse aufzuschreiben, währenddem J. versucht, ein Trapez zu erstellen. Zuerst glaubt J., dass die restlichen Vierecksformen nicht mehr gehen, sagt danach jedoch: „Aber wart, das Trapez haben wir ja zuvor geschafft.“ Er versucht, ein Trapez zu erzeugen, was ihm nicht gelingt. „Das Trapez geht gar nicht, weil es nicht...“

Episode 10 - Verifikation (12:05 - 12:46)

M. beendet den Schreibprozess und stellt fest: „Das Trapez ist eine Ausnahme!“ J. ergänzt: „Das Trapez besteht eben nicht aus Dreiecken.“ Die Probanden betrachten das beiliegende Theorieblatt. M. fragt nach, ob sich J. dabei sicher ist. „Ah, doch doch! Es besteht schon aus Dreiecken. Aber nicht aus solchen, die gleich gross sind.“ J. zeichnet die Teildreiecke auf dem Theorieblatt ein.

Hier nähern sich die Probanden dem zweiten Lösungskriterium und somit der Begründung, welche Vierecksformen darstellbar sind und welche nicht. Diese Kontrolle wird wiederum als *Verifikation* codiert.

Episode 11 - Schreiben (12:46 - 13:35)

M. beginnt mit der Formulierung eines Antwortsatzes. J. hilft ihm, nimmt ihm jedoch dann das Papier aus den Händen und schreibt selbst (13:03), was M. mit „keine Geduld“ kommentiert.

Episode 12 - Exploration (13:35 - 14:30)

Nach Beendigung des Satzes legt J. das Blatt zur Seite und meint (13:45): „Ich versuche das jetzt doch noch. Es kann doch nicht sein, dass das nicht geht!“ Auf die Frage, welche Form er meine, gibt J. keine Antwort. Vermutlich will er doch noch das Rechteck erzeugen. Er schiebt die Punkte hin und her und versucht dann, das Rechteck über die Begrenzung des Bildschirms zu „erschummeln“ (siehe Abb. 45), was ihm zu seinem Erstaunen nicht gelingt.

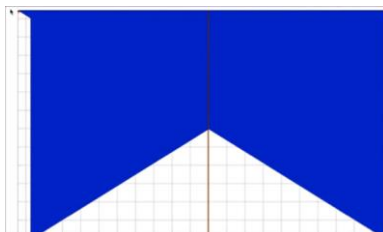
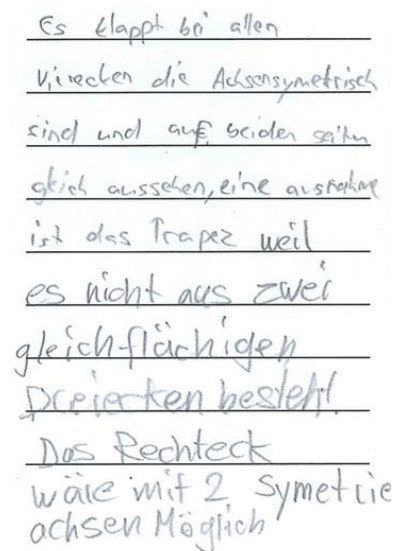


Abb. 45: A2, T1: Standbild beim Versuch, ein Rechteck zu erstellen

Episode 13 - Schreiben (14:30 - 15:58)

Nach einigen abschweifenden Worten wenden sie sich wieder der Dokumentation zu (14:30). J. ergänzt die Erklärung, welche Vierecksformen möglich sind und welche (siehe Abb. 46) nicht, mit der Erkenntnis, dass man das Rechteck mit zwei Spiegelachsen bilden könne. J. erklärt M., wie man das Rechteck mit zwei Spiegelachsen bilden könne auf dem Theorieblatt (15:32). M. runzelt die Stirn und meint, er verstehe das nicht. Danach beschliessen die Probanden, dass sie mit der Bearbeitung des Problems fertig seien.



Es klappt bei allen
Vierecken die Achsensymmetrisch
sind und auf beiden Seiten
gleich aussehen, eine ausstehend
ist das Trapez weil
es nicht aus zwei
gleichflächigen
Dreiecken besteht.
Das Rechteck
wäre mit 2 Symmetrie
achsen Möglich

Abb. 46: A2, T1: allgemeine Begründung der Erkenntnisse

11.2.1.2 Tandem 4

Episode 1 - Analyse (00:20 - 00:36)

Ohne die Aufgabenstellung erneut durchzulesen, beginnt D. mit einer spontanen Äusserung zur Lösungsangabe, welche Vierecksformen mit dem Applet nicht erzeugt werden können. „Rechteck, ja, das stimmt“, meint V., „das ginge, wenn es [das Dreieck, welches gespiegelt wird] ein Viereck wäre.“

V. bewegt die Eckpunkte am Applet an die Spiegelachse und signalisiert, dass sie verstanden hat, wie die Punkte verschoben werden können. Diese Tätigkeit stellt unserer Ansicht nach ein Durchdringen der Aufgabenstellung und somit ein Teil der Phase *Analyse* dar.

Episode 2 - Planung / Ausführung (00:36 - 00:52)

„Mach’ mal ein Quadrat!“, weist D. seine Partnerin an. V., die noch immer die Kontrolle über das Applet besitzt, stellt das Quadrat her. Wir codieren diese Tätigkeit aus mehreren Gründen als *Planung / Ausführung*: Erstens erfolgt das Erzeugen des Quadrates unmittelbar auf die Anweisung von D. (*Plan*). Zweitens ist die Handlung zielstrebig und zeigt kaum Aspekte von einem Ausprobieren. Drittens sind sich die Probanden bereits sicher, dass man das Quadrat mit einem Dreieck und seinem Spiegelbild erzeugen kann. Offenbar ist ihnen auch bewusst, wie dies geschehen soll.

Da diese Tätigkeit schnell, zielstrebig und nach der Anweisung von D. durchgeführt wird, codieren wir hier *Planung / Ausführung*.

Die Probanden beschliessen (00:52), dass diese Form korrekt ist, und einigen sich darauf, mit der Dokumentation zu beginnen.

Episode 3 - *Transition* (00:52 - 01:19)

Die Probanden arbeiten inhaltlich nicht mehr weiter, beginnen jedoch noch nicht mit der Dokumentation. Sie diskutieren, wer das Schreiben und Skizzieren übernehmen soll, besorgen sich Schreibmaterial und beschriften das Dokumentationsblatt. Schliesslich einigen sie sich darauf, dass sie in der Dokumentation mit dem Quadrat beginnen.

Episode 4 - *Schreiben* (01:20 - 03:13)

Die Probanden formulieren gemeinsam einen Antwortsatz für das Quadrat (Ergebnis siehe Abb. 47). Sie gehen dabei insbesondere auch darauf ein, mit welcher Dreiecksform das Quadrat gebildet werden kann. Sie einigen sich nach kurzen Unsicherheiten bezüglich der Begriffe „gleichseitig“ und „gleichschenkelig“ auf die untenstehende Formulierung. D. schreibt den gemeinsam formulierten Antwortsatz auf. Danach übernimmt V. das Skizzieren (02:38). Die Probanden achten dabei darauf, dass die Skizze exakt das auf dem Applet erzeugte Quadrat abbildet. D. gibt kurze Hinweise für die Skizze und beobachtet das Skizzieren danach still.

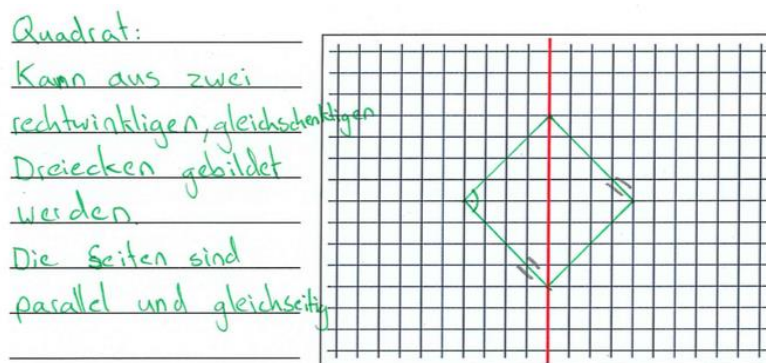


Abb. 47: A2, T4: Dokumentation zur Erzeugung des Quadrates

Episode 5 - *Planung / Ausführung* (03:14 - 03:43)

Mit der Äusserung „so, jetzt machen wir den Rhombus“ steigen die Probanden in die Phase *Planung / Ausführung* ein. Wieder übernimmt V. die Manipulation des Applets. Nach einer kurzen Nachfrage, welche Vierecksform der Rhombus ist, und einem Blick auf das Theorieblatt, wendet sie sich dem Applet zu. Sie verschiebt die mittlere Ecke des Quadrats horizontal zur Spiegelachse (siehe Abb. 48) und meint: „Das ist dann einfach so.“ D. stimmt ihr zuerst zu, danach meint er: „Nein, nein.“ Nach dem Protest von V., meint er: „Ah doch, ich meinte das Drachenviereck.“

Daraufhin bewegt V. die rechte Ecke ein Stück nach oben und meint: „Der wäre dann so.“ Nach Zustimmung von D. stellt die jedoch wieder den Rhombus her.

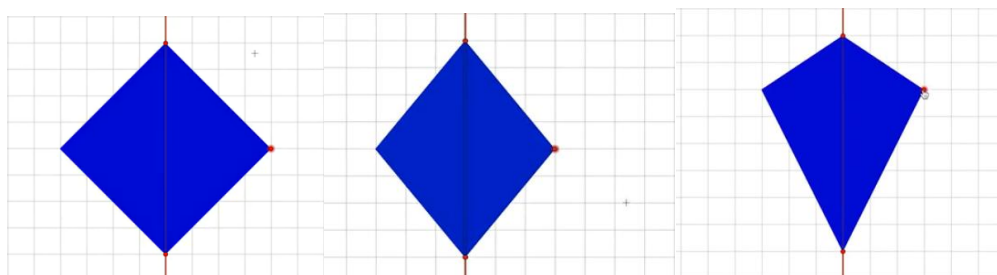


Abb. 48: A2, T4: Screenshots vom Quadrat zum Rhombus zum Drachenviereck

V. fasst ihre Erkenntnisse zusammen (03:33): „Es funktioniert halt auch. Und es [das Dreieck] ist immer noch gleichschenkelig, aber nicht mehr rechtwinklig.“

Episode 6 - Schreiben (03:43 - 06:13)

Die Probanden beschliessen mit der Dokumentation weiterzufahren (03:43). Nachdem sie sich vergewissert haben, wie viel Platz sie für die ganze Dokumentation zur Verfügung haben, beginnen sie mit der gemeinsamen Formulierung für den Rhombus. D. übernimmt das Schreiben. Kurz darauf (04:15) beginnt V. mit der Anfertigung der Skizze.

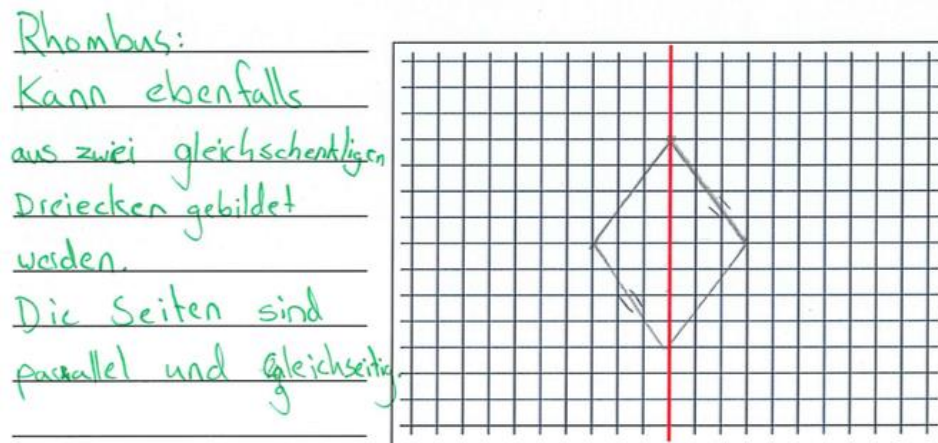


Abb. 49: A2, T4: Dokumentation zur Erzeugung des Rhombus

Episode 7 - Planung / Ausführung (06:14 - 06:31)

„Quadrat, Rhombus... Das Trapez geht nicht!“, behauptet D. und beginnt somit eine neue Phase *Planung / Ausführung*. „Aber das schreibst du erst nachher hin. Machen wir doch zuerst die, die gehen“, wendet V. ein. V. und D. unisono: „Rechteck geht nicht. Parallelenviereck auch nicht - Drachenviereck!“ Der Forderung von D., ein Drachenviereck zu erzeugen, kommt V. sofort und zielstrebig mit der Äusserung „ich mach das einfach eins nach oben“ nach (06:25).

Episode 8.1 - Schreiben (06:31 - 07:06, 07:45 - 08:00)

Erneut werden die neuen Erkenntnisse festgehalten. V. fertigt eine Skizze vom Drachenviereck an. D. schaut ihr dabei über die Schulter.

Episode 8.2 - Exploration (07:06 - 07:45)

Nachdem V. die Skizze fertiggestellt hat (07:06), unterbrechen sie die Phase des Schreibens. Sie diskutieren darüber, welche Form das Dreieck haben muss. V. zeigt auf den Diagonalschnittpunkt und meint: „Hier muss es einen rechten Winkel haben.“ Mit der Aussage „Ja, e mal f“, stimmt ihr D. zu. Daraufhin zeigt V. auf die obere Ecke hin und behauptet: „Hier muss es auch einen rechten Winkel haben.“ D. widerspricht ihr und meint, es könne einen rechten Winkel haben (so, wie es in der Applet zu diesem Zeitpunkt gerade dargestellt ist). Dies *müsse* jedoch nicht so sein. Um dies zu verdeutlichen, verschiebt D. die seitliche Ecke am Applet so, dass ein anderer Drachen entsteht.

Die Probanden beschreiben an dieser Stelle die Form der Dreiecke, aus welchen das Drachenviereck gebildet wurde, genauer und konzentrieren sich auf einen Einzelfall. Diese Tätigkeiten wirken weniger zielstrebig als in vorangehenden Phasen. Ausserdem bewe-

gen sich die Probanden weiter weg von der Problemstellung (schliesslich geht es um eine allgemeine Begründung, weshalb gewisse Vierecksformen erzeugt werden können). Aus diesen Gründen wird hier eine *Exploration* codiert.

Die Probanden wenden sich wieder ihrer Dokumentation zu (07:50); V. beschriftet ihre Skizze (siehe Abb. 50).

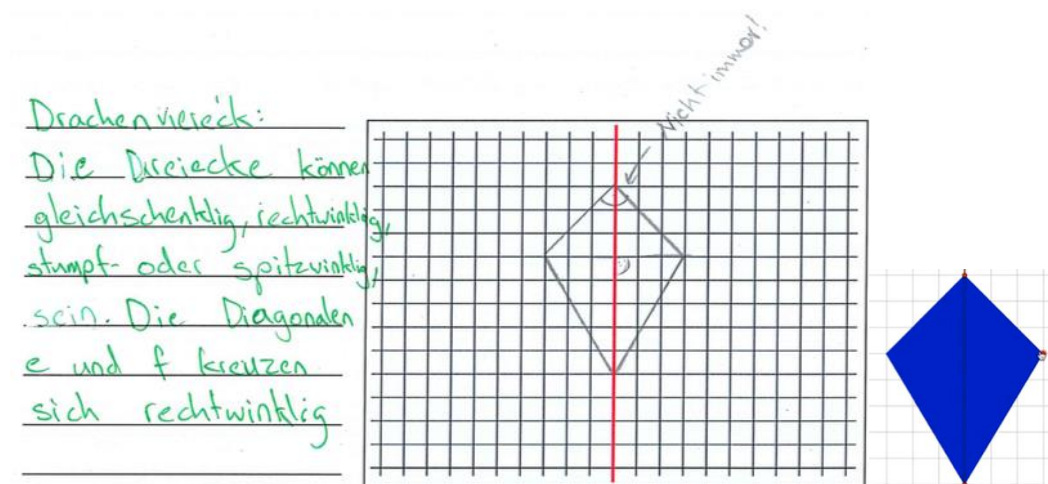


Abb. 50: A2, T4: Dokumentation zum Drachenviereck, Screenshot aus den Videoaufnahmen

Episode 10 - *Exploration* (08:00 - 09:00)

Die Probanden suchen nach einer genauen Beschreibung der Sachlage beim Drachenviereck. „Das ist aber nicht gleichschenkelig“, meint D., „dafür ist hier immer ein rechter Winkel.“ D. zeigt auf die obere Ecke. V. verneint dies und meint, dass die beiden Diagonalen stets rechtwinklig seien.

D. beginnt, die seitliche Ecke des Drachenvierecks ungerichtet zu bewegen (08:20). V. fragt nach, ob die eingestellte Form (siehe Abb. 51) auch ein Drache sei (08:24).

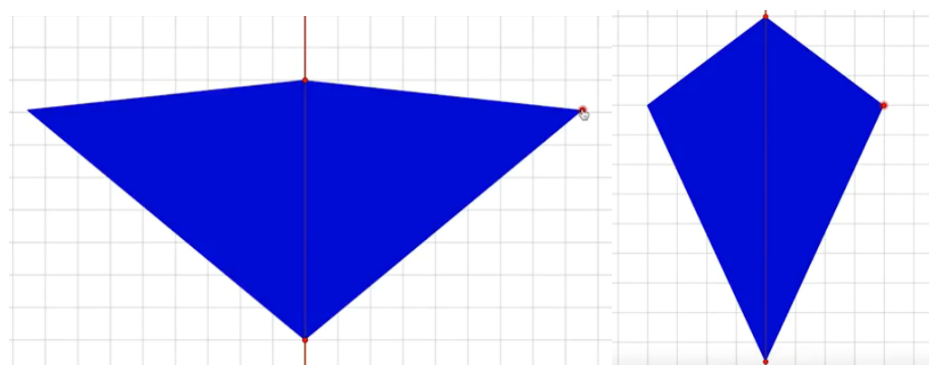


Abb. 51: A2, T4: Erzeugung von zwei Drachenvierecken

D. bejaht diese Frage und stellt noch mehrere andere Drachenvierecke her. Er sagt, dass dies alles Drachenvierecke seien, doch die Seitenverhältnisse *ungewöhnlich* seien. Kurz bevor sie sich wieder der Dokumentation widmen, erzeugt er auf dem Applet (siehe Abb. 51) einen „schönen“ Drachen (08:55).

Episode 11 - *Schreiben* (09:00 - 10:27)

Gemeinsam beginnen sie, ihre Erkenntnisse zum Drachenviereck gemeinsam zu formulieren. Wieder übernimmt D. die Schreibaarbeit. V. beobachtet ihn beim Notieren.

Episode 12 - *Exploration* (10:28 - 11:56)

D. beendet den Schreibprozess und V. bewegt die Ecken des Dreiecks im Applet. Sie fragt: „Ist das auch ein Drachenviereck?“, „Theoretisch schon“, antwortet D. V. meint darauf, dass der Drache in diesem Fall auf dem Kopf stehen würde. Sie beginnt, die Eckpunkte zu verschieben und stellt schliesslich wieder einen „schönen“ Drachen her.

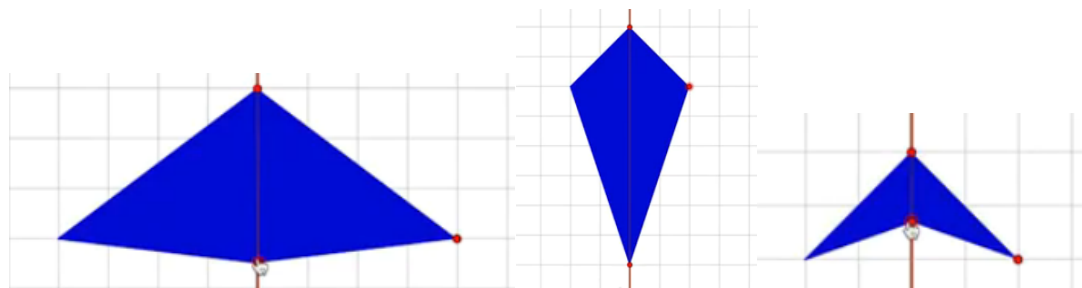


Abb. 52: A2, T4: links kopfstehender Drachen, mittig „schöner“ Drachen, rechts kein Drachen

D. übernimmt (11:02) die Bedienung des Applets und behauptet: „Es darf einfach nicht so sein.“ Die Probanden diskutieren im Anschluss darüber, ob das Dreieck spitz- oder stumpfwinklig sein kann. Sie einigen sich darauf, dass es spitz- und stumpfwinklig, jedoch nicht überstumpf (diesen Begriff können sie jedoch nicht nennen) sein darf.

Episode 13.1 - *Schreiben* (11:56 - 13:27, 13:44 - 14:39)

D. wendet sich der Dokumentation zu. Er wiederholt, was sie bereits notiert haben und ist im Begriff, die Dokumentation zum Drachenviereck zu vollenden. Die Probanden formulieren gemeinsam, wie die Diagonalen des Drachenvierecks zueinander stehen müssen (12:39).

Bei 13:03 beendet er seine Notizen zum Drachenviereck, was er mit „so“ kommentiert. Er beginnt zu notieren, welche Vierecksformen nicht möglich sind.

Trapez, Rechteck
und Parallelenviereck
können nicht mit
gespiegelten Dreiecken gebildet
werden.

Abb. 53: A2, T4: Formulierung einer allgemeinen Erkenntnis

Episode 13.2 - *Verifikation* (13:19 - 13:43)

V. bewegt die Punkte des Dreiecks am Applet und sagt: „Es müsste umgekehrt sein. Dann ginge das Parallelenviereck. Also weisst du, sie müssten umgekehrt sein.“ D. entgegnet darauf, dass es dann keine Achsenspiegelung mehr sei. V. präzisiert: „Dann wäre es ein Drehpunkt, kein Spiegel! Du kannst einen Drehpunkt machen und es umkehren und dann...“

D. schreibt seinen Antwortsatz fertig (siehe Abb. 53) und ergänzt auf Aufforderung von V. „gespiegelte“ Dreiecke (14:26).

Episode 14 - Verifikation (14:39 - 14:59)

Die Probanden haben ihre Dokumentation vollendet und diskutieren nun darüber, unter welchen geänderten Bedingungen die drei Vierecksformen Trapez, Rechteck und Parallelenviereck gebildet werden könnten. Sie kommen zum Schluss, dass man diese durch eine Punktspiegelung erzeugen könnte.

(14:59) Die Versuchsleiterin betritt das Zimmer; der Problembearbeitungsprozess ist beendet.

11.2.1.3 Tandem 5

Episode 1 - Analyse (00:03 - 00:12)

Die Probanden betrachten das Applet. Probandin M. fragt, ob sie mit dem Quadrat anfangen wollten. Sie übernimmt die Kontrolle über das Applet und beginnt, einen Eckpunkt an die Spiegelachse zu bewegen. Proband N. geht nicht auf ihre Frage ein und äusserst spontan: „Das Parallelenviereck geht nicht! Das Quadrat funktioniert sicher.“

Episode 2 - Exploration (00:13 - 00:43)

M. bewegt auch einen zweiten Eckpunkt an die Spiegelachse (siehe Abb. 54 B). Sie bewegt den Eckpunkt jedoch noch unsicher. „Es kommt eigentlich nicht darauf an. Du kannst ihn irgendwo hintun“, hilft N. weiter. M. bewegt die mittlere Ecke und platziert sie so, dass es ungefähr ein Quadrat gibt (Abb. 54, C). N. leitet sie in mehreren Schritten (Abb. 54 D bis E) an, bis sie ein Quadrat erzeugt haben, welches sie zufrieden stellt.

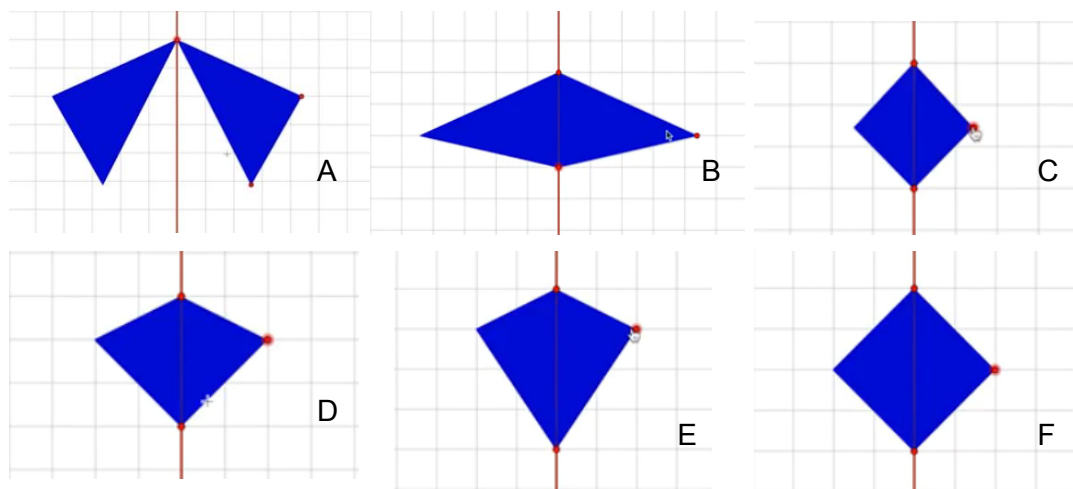


Abb. 54: A2, T5: Chronologische Abfolge bei der Bildung des Quadrates

Bei der vorliegenden Episode wird *Exploration* codiert, da bei der Erzeugung des Quadrates *kein* zielstrebiges, geplantes Verhalten ersichtlich ist. Dies zeigt sich unter anderem auch darin, dass die Probanden zuerst ein Quadrat erstellen, das sie von Auge abschätzen. Erst danach nehmen sie die Gitternetzlinien zu Hilfe, um rechte Winkel zu erstellen.

Episode 3 - Schreiben (00:44 - 02:43)

Die Probanden beschliessen, das Quadrat in der Dokumentation festzuhalten und entscheiden, dass Proband N. das Skizzieren übernimmt. M. hilft ihm dabei.

Diese Phase des *Schreibens* erstreckt sich über eine längere Zeit und findet gleichzeitig zu mehreren anderen Phasen statt. Proband N. skizziert und formuliert; denkt aber auch weiter und bringt seine Ideen für das weitere Arbeiten mit ein.

Episode 4 - Analyse mit gleichzeitigem Schreiben (01:01 - 01:17)

„Also ich glaube, es gehen diejenigen, die gleich lange Seiten [...] haben. Und die anderen funktionieren nicht“, meint M. (01:01). N. notiert noch kurz einige Worte und antwortet schliesslich (01:10): „Es gehen einfach die, die Achsen haben.“ „Spiegelachsen“, korrigiert M.

Die Probanden äussern sich in dieser Episode spontan zur Lösung und versuchen allgemein zu begründen, weshalb die einen Vierecksformen gebildet werden können und die anderen nicht. Deshalb wird hier *Analyse* codiert. Die Probanden befinden sich sehr nahe am Aufgabentext; sie haben eine *Idee*.

In dieser Phase eruieren die Probanden *ein* Kriterium zur Systematisierung der Vierecke. Ihr Kriterium lautet: „Es können diejenigen Vierecksformen unter den gegebenen Bedingungen erzeugt werden, die eine Spiegelachse besitzen.“ In der nächsten Phase wenden sie dieses Kriterium an. Sie entscheiden aufgrund dieses Kriteriums, ob eine Figur gebildet oder nicht gebildet werden kann.

Episode 5 - Exploration mit gleichzeitigem Schreiben (01:20 - 02:11)

„Das Parallelenviereck hat gar keine, oder?“, fragt M., was N., der wieder am Schreiben ist, abschliessend bestätigt. M. bewegt die Eckpunkte des Dreiecks im Applet mit dem Ziel, einen Drachen zu bilden (01:35). N. meint dazu, dass sie diesen bereits bei der Erzeugung des Quadrates gesehen hätten. M. bewegt vom Quadrat aus zuerst die äussere Ecke nach oben und sieht ein Drachenviereck. „Das Drachenviereck ist einfach...“, meint sie. Anschliessend bewegt sie die Ecken weiter und bildet dabei verschiedene Drachenvierecke ab.

Obwohl die Tätigkeiten von M. einen gewissen Charakter von Ausführung haben, wird hier *Exploration* codiert. Zum Zeitpunkt, als sie behauptet, das Drachenviereck sei einfach zu erzeugen, hat sie bereits eines erzeugt. Deshalb sprechen wir hier nicht von der *Ausführung* eines impliziten Plans.

„Das Trapez...“, beginnt sie (01:52). N. geht jedoch nicht auf sie ein - er ist noch mit der Dokumentation beschäftigt und fragt sich, wo er das Drachenviereck skizzieren soll. Währenddessen spielt M. mit dem Applet. Sie bewegt einen Eckpunkt über die Spiegelachse hinweg. Womöglich verfolgt sie das Ziel, ein Trapez zu erstellen. Sie kommt gemeinsam mit N. zum Schluss, dass das Trapez nicht funktioniert (02:11).

Episode 6 - Verifikation mit gleichzeitigem Schreiben (02:12 - 02:41)

„Wobei, das Trapez hat ja eine Spiegelachse...“, wendet M. ein, „also ja, ein gleichschenkliges!“ N. erkundigt sich: „Hat es tatsächlich eine Spiegelachse...? Ja es hat eine.“ Die beiden kommen zum Schluss, dass das (gleichschenklige) Trapez trotz dem Vorhandensein einer Spiegelachse nicht erzeugt werden kann. M. bedient das Applet, zieht bei der linken Figur der Abbildung 55 die Ecke nach aussen (rechte Figur Abb. 55) und meint: „Siehst du, wenn ich das hier nach aussen ziehe, geht es auseinander. Das geht nicht!“ „Und wieso nicht?“, fragt N. Die Probanden haben (noch) keine Antwort auf diese Frage.

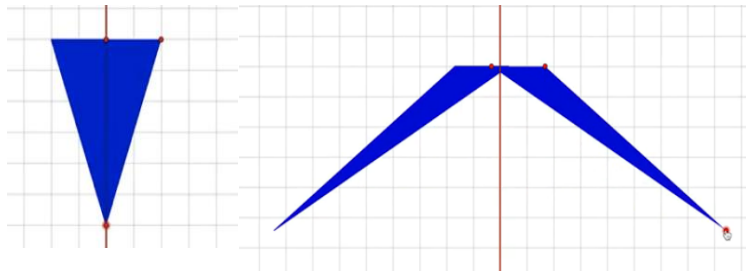


Abb. 55: A2, T5: Versuch, das Trapez zu erstellen

In dieser Episode kontrollieren die Probanden ihr Kriterium „alle Figuren, die Spiegelachsen haben, können gebildet werden“. Sie merken, dass dieses Kriterium nicht alleine gilt. Aufgrund dieser Kontrolle codieren wir diese Episode als Phase der *Verifikation*.

Episode 7 - Planung / Ausführung (02:42 - 03:50)

„Rechteck müssten wir jetzt“, liest M. vor (02:45). „Machen wir das Rechteck!“ M. startet bei der Figur A in Abbildung 56. Sie zieht an der unteren Ecke und ruft: „Das Rechteck geht aber auch nicht!“ N. widerspricht ihr und weist M. an, es auf dieselbe Art zu erzeugen wie das Quadrat.

M. versucht, erneut ein Quadrat zu erzeugen (03:06). Bei der Figur B in Abbildung 56 stoppt sie kurz und zieht danach die untere Ecke zur Figur C (Abb. 56). Offensichtlich irritiert fragt sie: „Hä? Wie haben wir das denn beim Quadrat gemacht?“

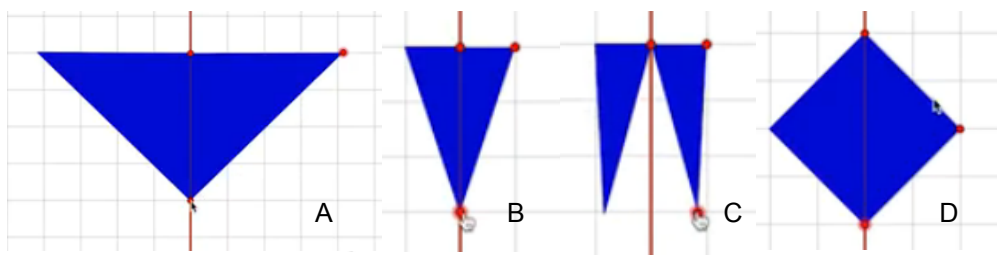


Abb. 56: A2, T5: Beginn des Versuchs, ein Rechteck zu erzeugen

Daraufhin weist N. sie in mehreren Teilschritten dazu an, ein Quadrat zu erstellen (03:16). Nachdem sie das Quadrat erstellt haben (Figur D, Abbildung 56), sagt N. (03:28): „Das ist ja eigentlich auch ein Rechteck!“

M. beginnt, an der untersten Ecke des Quadrates zu ziehen, stoppt dann und sagt: „Nein, aber das Rechteck kann man nicht machen!“ N. widerspricht erneut und erklärt ihr, wie sie die Ecken bewegen muss (03:37). In Abbildung 57 ist der chronologische Ablauf dieses angeleiteten Versuchs abgebildet. Um 03:50 geht dieses zielgerichtete Verfolgen eines Planes in ein ungerichtetes Ausprobieren über und somit endet die Phase *Planung / Ausführung* und geht fließend in eine *Exploration* über.

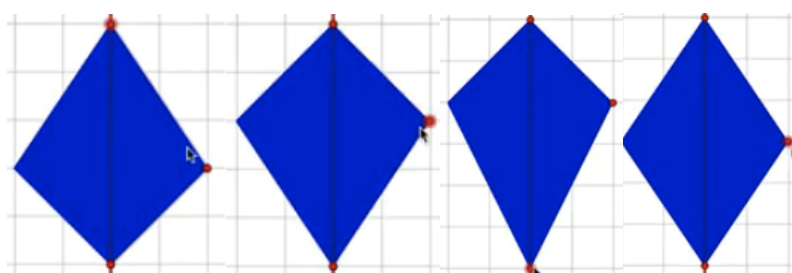


Abb. 57: A2, T5: Entdeckung des Rhombus beim Versuch, ein Rechteck zu erzeugen

Episode 8 - Exploration mit gleichzeitigem Schreiben (03:50 - 04:35)

Beim missglückten Versuch, das Rechteck durch Ausprobieren zu erstellen, stoßen sie zufällig auf eine „neue“ Figur (04:00). „Ein Rhombus! Das ist ein Rhombus, oder?“, ruft N. „Ja - der Rhombus geht!“, bestätigt M. N. erwähnt: „Dann müssen wir nur noch herausfinden, wie.“

Die Probanden fassen zusammen, welche Vierecksformen erzeugt werden können und kommen zum Schluss, dass Rhombus, Quadrat und Drachenviereck möglich sind (04:10).

„Die anderen können gar nicht gehen, weil du sie unten auseinanderziehen müsstest“, erklärt M., während N. bereits mit dem *Schreiben* (04:20) beginnt. N. weist seine Partnerin an (04:25), zu überlegen, weshalb man Rechteck, Parallelenviereck und Trapez unter den gegebenen Bedingungen nicht erzeugen kann.

Episode 9 - Verifikation mit gleichzeitigem Schreiben (04:36 - 05:45)

Nachdem M. das Dreieck im Applet geringfügig bewegt hat, erklärt sie¹⁹: „Ich glaube, weil, wenn man die Spiegelachsen einzeichnet, zum Beispiel hier.“ M. zeigt auf das Trapez auf dem Theorieblatt. „Dann gibt es ja nicht ein Dreieck, dann gibt es ein Viereck! Beim Parallelenviereck - naja, da hat es sowieso keine Spiegelachsen.“ M. erklärt, dass hingegen die Spiegelachsen beim Rhombus und beim Quadrat die Figur in zwei Dreiecke teilen. M. deutet mit dem Finger an, wo die beiden Spiegelachsen im Rechteck liegen. Sie erklärt, dass die Spiegelachsen diese Figur in Vierecke teilt und nicht in Dreiecke.

N. hält fest: „Es kommt nicht nur darauf an, ob sie [die Vierecksformen] eine [Spiegelachse] haben oder nicht, sondern was daraus wird. Hier gibt es irgendwelche Vierecke.“ N. zeigt auf das Trapez. „Und beim Drachenviereck sind es dann zwei Dreiecke. Deshalb geht es auch.“

In dieser Phase überprüfen die Probanden ihr Ordnungskriterium „vorhandene Spiegelachsen“ und ergänzen dieses durch das zweite Kriterium „Spiegelachse trennt die Figur in zwei Dreiecke“. Somit haben die Probanden eine allgemeine Begründung gefunden, weshalb einige Vierecksformen erzeugt werden können und andere nicht. Aus diesem Grund wird hier die *Verifikation* codiert.

Episode 10 - Schreiben (05:46 - 12:00)

Die Probanden beschliessen, die bisher gewonnenen Erkenntnisse festzuhalten. N. widmet sich wieder der Dokumentation. Gemeinsam formulieren sie ihre Erkenntnisse.

Sie diskutieren über die optimale Formulierung eines Antwortsatzes zum Quadrat. (Beginn 05:46). M. stellt wieder das Quadrat auf dem Bildschirm ein. Schliesslich entscheiden sie sich, lieber eine allgemeine Begründung (siehe Abb. 58) zu formulieren (06:10). Zur Veranschaulichung erzeugt M. die Vierecksformen, die möglich sind, im Applet.

¹⁹ An dieser Stelle hat die Aufnahme von der Webcam (Tonspur) einen Fehler. Deshalb greifen wir an dieser Stelle auf die Gesamtaufnahme der Kamera zurück.

das
 Ven man ~~kein~~ Quadrat,
 oder den
 Drachen, Rhombus
 durch die Spiegelachse
 in 2 Hälften teilt entstehen
 2 dreieck des halb
 kan man sie in
 der Übung auf dem
 Computer bilden.

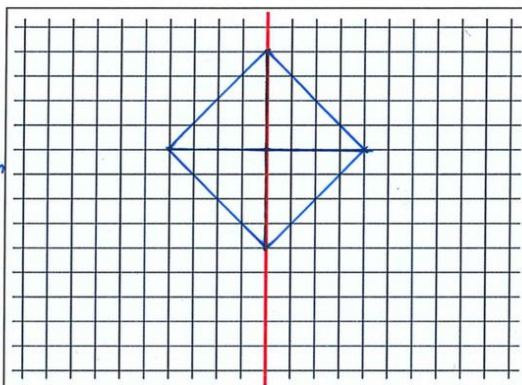


Abb. 58: A2, T5: Auszug aus der Dokumentation zum Quadrat

Nachdem sie erklärt haben, weshalb die Vierecksformen Quadrat, Drachen und Rhombus erzeugt werden können, entscheiden sie, auch zu erklären, weshalb die restlichen Figuren *nicht* erzeugt werden können (siehe Abb. 59, Beginn 09:32). Wieder notiert N. die Erklärung und M. hilft bei der Formulierung.

Beim Bei der restlichen
 3 vierecken (Trapez, re-
 chteck, Parallelenviereck)
 geht das nicht,
 weil wen man sie
 durch die Spiegelachse
 in 2 teile trennt
 entsteht entstehen vierecks-
 formen und nicht Dreieck-
 dreiecke.

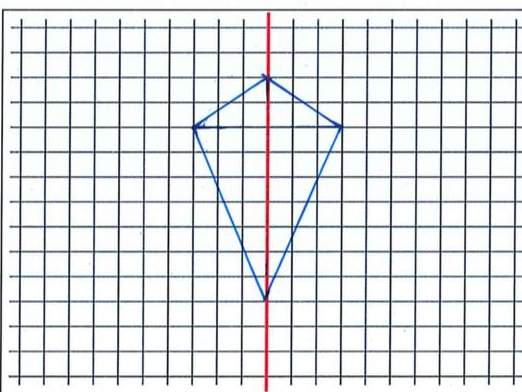


Abb. 59: A2, T5: Auszug aus der Dokumentation zum Drachen

Mit der Fertigstellung des letzten Satzes meint M.: „Jetzt sind wir fertig!“

Episode 11 - Exploration (12:00 - 13:08)

N. betrachtet nochmals die Aufgabenstellung und wendet schliesslich ein: „Warte, wir könnten noch irgendwie schreiben, [...] wenn man zwei Dreiecke zusammen macht, [...] also an irgendeiner Seite spiegelt, dann gibt es immer ein Viereck.“ N. hat inzwischen das Dokumentationsblatt M. übergeben. Diese bedient das Applet und erstellt ein beliebiges Dreieck und zieht dieses an die Spiegelachse (Abb. 60).

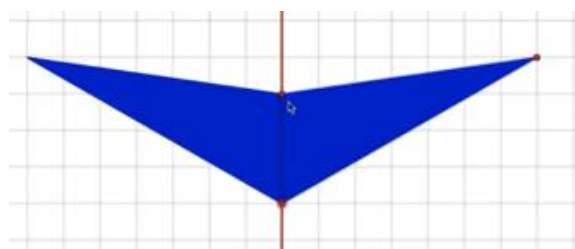


Abb. 60: A2, T5: beliebiges Dreieck an der Spiegelachse

„Ah, warte, doch nicht“, antwortet N. M. wendet jedoch ein, dass diese Form durchaus ein Viereck sei. Die Probanden diskutieren darüber, ob der Punkt beim überstumpfen Winkel (diesen Begriff nennen sie nicht) eine „Ecke sei“. M. meint, dies sei ein allgemeines Viereck. N. wirkt nicht überzeugt und meint, dass eine solche Form (mit überstumpfen Winkel) nicht „als Ecke zählen“ würde. Die beiden äussern sich, dass sie sich nicht sicher seien und sie es deshalb nicht festhalten wollen. Sie beenden damit die Episode.

In dieser Episode arbeiten die Probanden weiter weg vom Problem. Sie gehen nicht mehr genau auf die Aufgabenstellung ein - sie möchten offensichtlich noch mehr über die Sachlage herausfinden, als gefragt ist. Deshalb wird hier, auch wenn einige Tätigkeiten zwischendurch (wie zum Beispiel beim Erzeugen des Vierecks in Abb. 60) einen Charakter der *Verifikation* haben, einheitlich *Exploration* codiert.

Episode 12 - Lesen (13:09 - 13:38)

M. fragt nach einer Bestätigung, dass die Aufgabe beendet sei (09:10). N. zieht erneut die Aufgabenstellung herbei und liest diese halblaut vor. Nach einem kurzen Wortwechsel beschliessen sie, dass sie fertig seien, und holen die Versuchsleiter ins Zimmer (13:38).

11.2.2 Vergleich der Problembearbeitungsprozesse

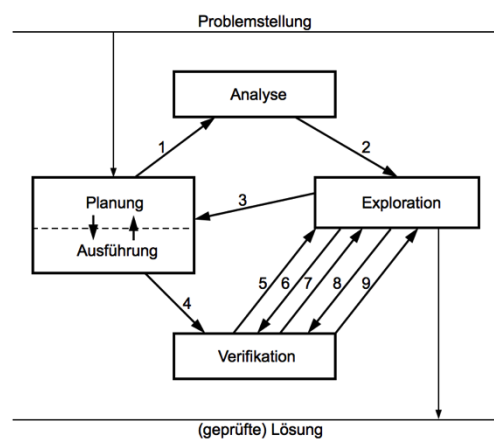


Abb. 61: A2, T1: Prozessverlauf

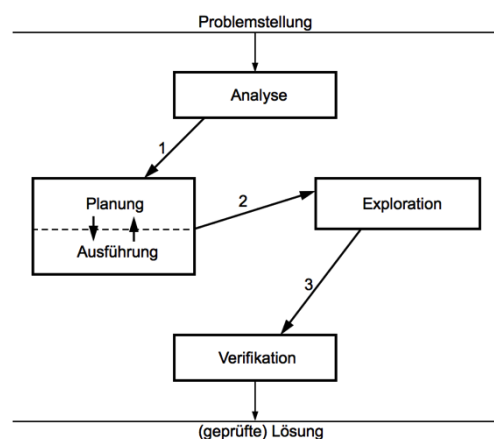


Abb. 62: A2, T4: Prozessverlauf

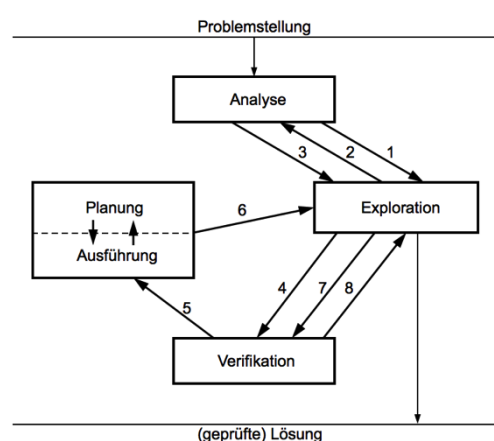


Abb. 63: A2, T5: Prozessverlauf

11.2.2.1 Einstieg

Zwei Tandems (Tandems 4 und 5) starteten mit einer spontanen Äußerung (*Analyse*) darüber, welche Vierecksformen erzeugt werden können und welche nicht. Im Vergleich dazu stieg Tandem 1 gleich mit der Erzeugung einer ersten Vierecksform, dem Quadrat, ein und eröffnete den Bearbeitungsprozess somit mit einer Phase der *Planung / Ausführung*. Im weiteren Verlauf des Problembearbeitungsprozesses weisen die Abbildungen unterschiedliche Wege aus.

11.2.2.2 Abschluss

Die drei Tandems beendeten den Bearbeitungsprozess aus unterschiedlichen Phasen. Während Tandem 4 nach einer Phase der Verifikation (Erläuterung, unter welchen Bedingungen die „unmöglichen“ Vierecksformen gebildet werden könnten) abschloss, beendeten die anderen beiden Tandems den Prozess nach einer Phase der Exploration.

11.2.2.3 Phasenwechsel

Während bei Tandem 4 nur sehr wenige Phasenwechsel und zudem ein linearer Bearbeitungsprozess zu beobachten waren, haben die Tandems 1 und 5 viele Phasenwechsel vorgenommen. Über alle drei Tandems konnten wir mit Ausnahme des Wechsels zwischen *Analyse* und *Verifikation* (und umgekehrt) Phasenübergänge zwischen sämtlichen Phasen beobachten.

Auffallend ist bei den Tandems 1 und 5, dass sie die Phase der Verifikation mehrfach durchlaufen und dann wieder Rückschritte zur *Exploration* (viermal) oder zur Phase der *Planung / Ausführung* (einmal) machten. Sämtliche Verifikationen, die wir in den drei Bearbeitungsprozessen beobachten konnten, stellen inhaltliche Kontrollen dar.

Die *Verifikationen* wurden jedoch auf unterschiedlichen Niveaus durchgeführt:

1. Phasen der inhaltlichen *Verifikation* identifizieren, die sich auf eine *einzelne Vierecksform* beziehen. Dies war bei Tandem 1 (06:50) der Fall.

2. Phasen der *Verifikation*, die sich auf eine allgemeine Begründung beziehen. Alle anderen codierten *Verifikationen* ordnen wir dieser Art zu: Tandem 1 (10:20, 12:05), Tandem 4 (13:19, 14:39) und Tandem 5 (02:12, 04:36).

11.2.2.4 Zeitlicher Verlauf

Aus dem zeitlichen Verlauf (Abb. 64) wird ersichtlich, dass Tandem 1 viele kurze Phasen durchlaufen hat. Insbesondere die Phasen der *Analyse* und *Planung / Ausführung* nehmen jeweils nur eine kurze Zeitspanne in Anspruch. Zudem sind viele Phasenwechsel sichtbar. Überlappungen sind auch bei dieser Aufgabe aufgetaucht - wiederum können wir diese nur im Zusammenhang mit dem Schreibprozess feststellen.

Für die *Exploration* verwenden die Probanden von Tandem 1 bei dieser Aufgabe sehr viel Zeit. Mit 4min 37s (von insgesamt 15min 39s) stellt die *Exploration* abgesehen vom *Schreiben* die Phase mit dem grössten Anteil an der Bearbeitungszeit dar. Der *Schreibprozess* dauert mit 9min 11s am längsten (im Vergleich dazu: 1min 22s *Planung / Ausführung*, 1min 26s *Verifikation* und 16s *Analyse*).

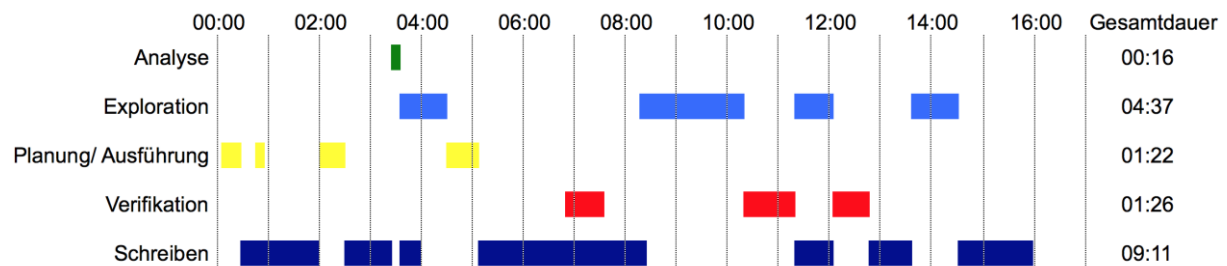


Abb. 64: A2, T1: zeitlicher Verlauf

Bei Tandem 4 sind nur wenige Phasenwechsel ersichtlich (vgl. Abb. 65). Jedoch werden die einzelnen Phasen (*Exploration*, *Planung / Ausführung* und *Verifikation*) jeweils durch kürzere oder längere Episoden des Schreibens unterbrochen. Zudem können wir keine „Rückschritte“ zwischen einzelnen Phasen identifizieren - der Bearbeitungsprozess dieser Aufgabe verläuft linear.

Für die *Exploration* wird abgesehen vom *Schreiben* klar am meisten Zeit (3min 7s von insgesamt 14min 59s) aufgewendet (im Vergleich dazu 16s *Analyse*, 1min 2s *Planung / Ausführung* und 44s *Verifikation*). Das *Schreiben* nimmt auch bei diesem Tandem am meisten Zeit in Anspruch (9min 6s). Überlappungen von einzelnen Episoden sind kaum erkennbar - es handelt sich jeweils nur um äusserst kleine Sequenzen.

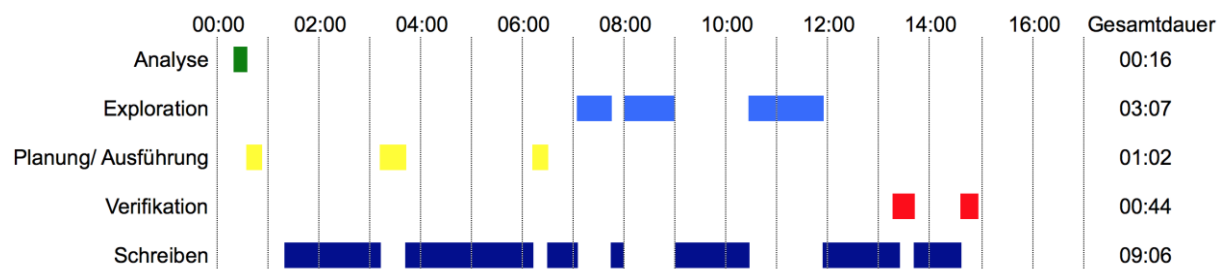


Abb. 65: A2, T4: zeitlicher Verlauf

Aus dem zeitlichen Verlauf von Tandem 5 (Abb. 66) zur vorliegenden Aufgabe können wir klar erkennen, dass das Tandem viele Phasenwechsel vornimmt, wobei einzelne Phasen ziemlich kurz sind. Der Schreibprozess nimmt 8min 48s (von insgesamt 13min 38s²⁰) in Anspruch.

Auffällig ist bei diesem Tandem ausserdem, dass die Probanden bereits nach 5min 45s ein Ergebnis ermittelt und geprüft haben. Auch beim Tandem 5 nimmt die Phase des *Explorierens* neben dem Schreibprozess am meisten Zeit in Anspruch (3min 12s). Wenn man jedoch die letzte Episode des *Explorierens* (Beginn 12:00, die Aufgabe ist zu diesem Zeitpunkt längst gelöst) nicht beachtet (2min 6s), dann bekommen auch die Phasen *Planung / Ausführung* (1min 7s) und *Verifikation* (1min 38s) zeitanteilmässig eine grössere Bedeutung.

Wie auch bei den anderen Tandems sind auch hier Überlappungen von einzelnen Episoden sichtbar. Jedoch wiederum bloss in Kombination mit einem Schreibprozess.

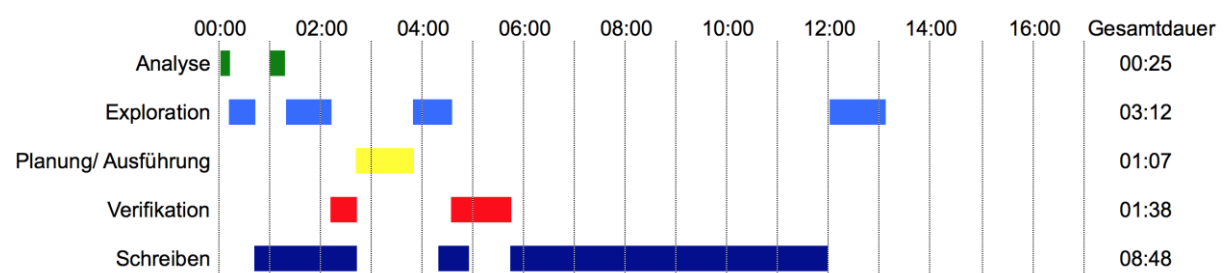


Abb. 66: A2, T5: zeitlicher Verlauf

11.3 Zusammenfassung über beide Aufgaben

Über alle drei Tandems konnten bei beiden Aufgaben sämtliche Phasen des Phasenmodells von Rott (2013) identifiziert werden. Durch das Codieren stellte sich heraus, dass keine zusätzlichen Phasen notwendig sind. Bei der ersten Aufgabe haben zwei der drei Tandems im eigenen Prozess jeweils auch alle Phasen durchlaufen; bei der zweiten Aufgabe haben sich alle Tandems in sämtlichen Phasen bewegt.

Mit Ausnahme einer Bearbeitung (Tandem 1, Aufgabe 2) haben alle Prozesse beider Aufgaben mit einer *Analyse* - oft in Form einer spontanen Äusserung - begonnen. Beendet wurden die Prozesse jedoch unterschiedlich entweder über die *Exploration* (viermal) oder über die *Verifikation* (zweimal). Auch bezüglich der Reihenfolge und der Anzahl Phasenwechsel konnten wir bei den sechs Bearbeitungsprozessen Unterschiede beobachten. Abgesehen vom Wechsel zwischen *Analyse* und *Verifikation* sind bei der zweiten Aufgabe sämtliche Phasenübergänge vorgekommen. Aus dem Vergleich der Phasendurchläufe aller sechs Prozesse fällt uns auf, dass wir die Phase der *Exploration* am häufigsten codiert haben. Von der *Exploration* konnten wir Übergänge zu allen anderen Phasen des Modells beobachten; auch umgekehrt zeigte sich, dass auch Übergänge von den Phasen *Analyse*, *Planung / Ausführung* und *Verifikation* zur *Exploration* vorgekommen sind. Im Vergleich der beiden Aufgaben scheint uns ausserdem auffällig, dass die Phase *Planung / Ausführung* bei der zweiten Aufgabe deutlich öfter codiert wurde, als bei der ersten Aufgabe.

Alle Tandems haben in der zweiten Aufgabe (teilweise deutlich) mehr Phasenwechsel vorgenommen als bei der ersten Aufgabe: Tandem 1 unternahm in der ersten Aufgabe sieben Pha-

²⁰ Ab Minute 13:09 ziehen die Probanden erneut den Aufgabentext herbei. Die Phase „Lesen“, die dort codiert wurde, ist in der vorliegenden Aufgabe nicht erfasst. Tandem 5 ist das einzige Tandem, das zum Schluss nochmals den Aufgabentext betrachtet.

senwechsel, in der zweiten Aufgabe 9. Das zweite Tandem wechselte bei der ersten Aufgabe einmal und bei der zweiten dreimal. Während das dritte Tandem bei der ersten Aufgabe drei Phasenwechsel vornahm, waren es bei der zweiten Aufgabe acht Phasenübergänge.

Bei beiden Aufgaben konnten wir zeitliche Überlappungen von einzelnen Episoden feststellen. Jedoch konnten wir diese nur in Verbindung mit dem Schreibprozess beobachten. Insgesamt stellte bei allen Tandems bei beiden Aufgaben der Schreibprozess den grössten Teil der individuellen Bearbeitungszeit dar.

12 BEWERTUNG DER BEARBEITUNGSPROZESSE

12.1 Aufgabe 1

Im Folgenden bewerten wir die Problembearbeitungsprozesse der einzelnen Tandems bei der Aufgabe „das drehende Quadrat“. Dabei halten wir uns an die unterschiedlichen Ansätze, wie wir sie bei Abschnitt 7.1.7 ausgeführt haben.

12.1.1 Tandem 1

Den Problembearbeitungsprozess von Tandem 1 stufen wir bei der Aufgabe „das drehende Quadrat“ als einen *einfachen Ansatz* ein. Dies aus folgenden Gründen:

Die Probanden kommen sehr schnell zur Erkenntnis, dass die grüne Fläche ein Viertel der Quadratfläche ist. Sie wissen (oder eher: sie vermuten), dass dies unabhängig von der Lage des beweglichen Quadrates *immer* der Fall ist. Ihre Erkenntnisse wurden an einigen Einzelfällen gezeigt. Sowohl bei den Spezialfällen „Quadrat“ und „Dreieck“ als auch bei einem Fall dazwischen ermitteln die Probanden den Flächeninhalt der grünen Fläche, indem sie angebrochene Häuschen ergänzen und zählen. Diesen Schritt führen sie sehr ausführlich, übersichtlich und sauber durch. Eine allgemeine Begründung oder Erklärung, weshalb die grüne Fläche *immer* ein Viertel ist, können die Probanden hingegen nicht formulieren. Schüler M. ist zwar gegen Ende des Bearbeitungsprozesses sehr nahe an einer korrekten Begründung: Er erkennt, dass der Teil des Umfangs des stehenden Quadrates stets ein Viertel des gesamten Umfangs ist und versucht, dies noch genauer zu begründen. Er lässt sich jedoch von dieser Idee abbringen - unter anderem, weil sein Tandempartner nicht klar erkennt, was M. meint. Dieser Ansatz wurde weder in der Besprechung mit der Versuchsleitung geäußert noch in der Dokumentation schriftlich festgehalten.

12.1.2 Tandem 4

Den Problembearbeitungsprozess von Tandem 4 stufen wir bei der Aufgabe „das drehende Quadrat“ als einen *einfachen Ansatz* ein. Dies aus folgenden Gründen:

Die Probanden stellen sehr schnell fest, dass die grüne Fläche *immer* ein Viertel einer Quadratfläche ist. An den Spezialfällen „Dreieck“ und „Quadrat“ wird über das Abzählen der Häuschen gezeigt, dass die Fläche in diesen Fällen vier Häuschen oder eben ein Viertel der Quadratfläche beträgt. Mit fortlaufender Bearbeitung entfernen sich die Probanden von der Problemstellung. Sie untersuchen nicht mehr die *Grösse* der überdeckten Fläche, sondern die *Form*. Sie konnten diesbezüglich einige Entdeckungen machen. Jedoch sind diese in der Aufgabenstellung nicht gefragt und verhelfen in keiner Weise zu einer Begründung, weshalb der Flächeninhalt beim Drehen des Quadrates stets gleich ist.

Die Probanden beschränken sich auf die Ermittlung des Flächeninhalts bei den Spezialfällen und äussern sich nicht zu einzelnen Fällen dazwischen. Darüber sprechen die Probanden erst *nach* dem Nachfragen der Versuchsleitung in der Besprechung. Sie erläutern zu diesem Zeitpunkt, dass sie die Fläche dort auch berechnen können. Schliesslich finde man *in* der grünen Fläche

jeweils zwei Teile eines Häuschens, die sich ergänzen. Hier sind die Probanden auch sehr nahe an einer allgemeinen Begründung, erkennen diese jedoch *nicht* als solche.

12.1.3 Tandem 5

Der Problembearbeitungsprozess der Aufgabe „das drehende Quadrat“ dieses Tandems ist der bestmögliche Ansatz, den wir von den Probanden erwartet hatten. Eine korrekte, formale Begründung ist in diesem Fall nicht stufengerecht. Wir stufen den Bearbeitungsprozess aus folgenden Gründen als *erweiterten Ansatz* ein:

Die Probanden bleiben nicht nur bei der Beobachtung, dass die überdeckte Fläche ein Viertel der Quadratfläche ist. Sie begründen diese Erkenntnis genau: „*Was auf der einen Seite abnimmt, kommt auf der anderen hinzu!*“

Es ist eine „Musterlösung“ davon, was wir von den Probanden erwarten konnten. Sie formulierten eine saubere, allgemeine und anschauliche Begründung der Erkenntnis, dass die grüne Fläche stets gleich gross ist.

12.1.4 Vergleich der einzelnen Bewertungen von Aufgabe 1

Obwohl wir sowohl die Produkte von Tandem 1 als auch von Tandem 4 als *einfachen Ansatz* bewertet haben, sind nicht beide Bearbeitungen von gleicher Qualität. Tandem 1 betrachtet neben den zwei Spezialfällen auch noch einen weiteren Fall, bei welchem der Flächeninhalt nicht offensichtlich ist. Auch beim dritten Fall ermitteln sie den Flächeninhalt korrekt. Ausserdem *nähern* sie sich gegen Ende des Bearbeitungsprozesses einer korrekten Begründung. Im Vergleich dazu betrachtet Tandem 4 ausschliesslich die Spezialfälle und entfernt sich in der Folge von der Problemstellung. Da jedoch beide Tandems keine Begründung formulieren können (weder in der Dokumentation noch in der nachfolgenden Besprechung), werden die Produkte als einfache Ansätze bewertet.

Wenn wir die unterschiedlichen Bewertungen mit den jeweiligen Phasendurchläufen vergleichen, fällt Folgendes auf:

1. Tandem 4 bewegt sich nach einer kurzen, spontanen Äusserung (*Analyse*) nur noch in der *Exploration* und beendet den Prozess aus dieser Phase. Innerhalb der Phase der *Exploration* entfernen sie sich vom Problem. Daraus resultiert die Bewertung des einfachen Ansatzes.
2. Tandem 1 durchläuft im Vergleich zu Tandem 4 (und Tandem 5) viel mehr Phasenwechsel. Dennoch liegt ein einfacher Ansatz vor.
3. Dem guten Produkt der Bearbeitung von Tandem 5 liegt ein linearer Problembearbeitungsprozess zu Grunde.

12.2 Aufgabe 2

Im Folgenden bewerten wir die Problembearbeitungsprozesse der einzelnen Tandems bei der Aufgabe „Vierecke aus zwei Dreiecken“. Dabei halten wir uns an die unterschiedlichen Ansätze, wie wir sie im Kapitel 7.2.6 beschrieben haben.

12.2.1 Tandem 1

Den Problembearbeitungsprozess von Tandem 1 stufen wir bei der Aufgabe „Vierecke aus zwei Dreiecken“ als einen *erweiterten Ansatz* ein. Dies aus folgenden Gründen:

Die Probanden bestimmen alle möglichen Vierecksformen und stellen sie mit dem GeoGebra-Applet dar. Sie beschreiben sehr detailliert, welche Eigenschaften ein Dreieck haben muss, damit es zusammen mit seinem Spiegelbild die gewünschte Vierecksform ergibt.

Die Probanden ermitteln *ein* Lösungskriterium; die Symmetrieeigenschaft. Ausserdem erkennen sie, dass die Achsensymmetrie zwar notwendig, nicht aber hinreichend ist. Jedoch können sie das zweite Lösungskriterium, dass die Symmetrieachse die Vierecksform in zwei Dreiecke teilen muss, nicht nennen. Die Probanden sprechen davon, dass die Vierecksform zwar achsensymmetrisch sein muss, aber nicht gleichzeitig drehsymmetrisch sein darf. Es ist zwar nachvollziehbar, dass die Probanden über die Punktspiegelung das zweite Kriterium finden wollen, jedoch ist die Begründung (man betrachte das Quadrat als Gegenbeispiel) nicht korrekt.

12.2.2 Tandem 4

Den Problembearbeitungsprozess von Tandem 4 stufen wir bei der Aufgabe „Vierecke aus zwei Dreiecken“ als einen *einfachen Ansatz* ein. Dies geschieht aus folgenden Gründen:

Die Probanden haben alle möglichen Vierecksformen bestimmt und auf dem GeoGebra Applet erzeugt. Das Tandem beschreibt die Eigenschaften dieser Vierecksformen (und aus welchen Dreiecken sie gebildet werden können) äusserst ausführlich und detailliert. Die Probanden vergleichen hingegen die möglichen Vierecksformen nur ansatzweise. Sie betonen immer wieder, welche Vierecke aus einem Dreieck und seinem Spiegelbild erzeugt werden können, und deuten die Achsenspiegelung mit Gesten an. Den Probanden gelingt es zusätzlich zu erklären, dass das Rechteck mit einer Punktspiegelung möglich wäre. Während des ganzen Bearbeitungsprozesses und der Besprechung danach äussern die Probanden jedoch zu keiner Zeit eine Verbindung zur Symmetrieeigenschaft der Vierecksformen. Deshalb sprechen wir beim vorliegenden Fall bloss von einem *einfachen Ansatz*.

12.2.3 Tandem 5

Den Problembearbeitungsprozess von Tandem 5 bewerten wir bei der Aufgabe „Vierecke aus zwei Dreiecken“ als korrekten Ansatz. Dies erfolgt aus folgenden Gründen:

Die Probanden konnten nach der Erzeugung des Quadrates das erste Lösungskriterium, die Achsensymmetrie, eruieren. Dieses haben sie bei nächsten Figuren angewandt und konnten so *vor* der Erzeugung einer Vierecksform entscheiden, ob man die Figur aus einem Dreieck und seinem Spiegelbild erstellen kann oder nicht. Beim (rechtwinkligen) Trapez haben die Probanden jedoch erkannt, dass die Achsensymmetrie als Eigenschaft zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist, um zu entscheiden, ob man die Figur erstellen kann. Schliesslich konnten sie (mit Hilfe des Theorieblattes) das zweite Kriterium ermitteln und so eine allgemeine Begründung dafür konstruieren, welche Vierecksformen mit einem Dreieck und seinem Spiegelbild erzeugt werden können. Die Probanden haben ihre Ideen kontrolliert - neben der Erzeugung im Applet haben

die Probanden das Theorieblatt zur Hilfe gezogen, haben Symmetrieachsen eingezeichnet und Teildreiecke markiert.

12.2.4 Vergleich der einzelnen Bewertungen von Aufgabe 2

Die unterschiedlichen Bewertungen der Tandems 1 und 4 kommen aus folgenden Gründen zu Stande: Im Gegensatz zu Tandem 4 gelang es Tandem 1, die Symmetrieeigenschaft als Kriterium für die Kategorisierung zu verbalisieren. Tandem 4 äusserte zu keinem Zeitpunkt die Absicht, nach einer allgemeinen Begründung zu suchen. Zudem äusserten sie sich nicht dazu, weshalb Parallelenviereck, Rechteck und Trapez nicht erzeugt werden können. Tandem 1 wendete das Kriterium der Achsensymmetrie auf die Vierecksformen an, um zu entscheiden, ob diese erzeugt werden können oder nicht. Dabei stellten sie fest, dass dieses zwar ein notwendiges aber kein hinreichendes Kriterium ist.

Tandem 5 hebt sich dadurch von den beiden anderen Tandems ab, dass sie das zweite Kriterium ermitteln und somit eine vollständige, korrekte Begründung formulieren konnten.

Beim Vergleich der Bewertungen mit den Phasendurchläufen der einzelnen Tandems fällt uns bei dieser Aufgabe Folgendes auf:

1. Tandem 5 zeigt einen Prozessverlauf in allen Phasen mit Vor- und Rückschritten und beendet den Prozess nach einer Phase der *Exploration*. In diesem Prozessverlauf entwickeln die Probanden ein Produkt mit einem *korrekten Ansatz*.
2. Die Probanden von Tandem 4 bearbeiten das Problem in einem linearen Prozessverlauf mit nur wenigen Phasenwechseln mit einem *einfachen Lösungsansatz*.
3. Tandem 1 erreicht nach einem Prozessverlauf mit vielen Phasenwechseln und Rückschritten einen *erweiterten Ansatz* der Lösung.
4. Tandem 1 und 5 erreichen beide einen höheren Ansatz als Tandem 4. Auffällig ist hier, dass die Prozessverläufe von Tandem 1 und 5 im Vergleich zu Tandem 4 viel mehr Phasenwechsel (insbesondere zwischen *Verifikation* und *Planung / Ausführung* oder *Exploration*) zeigen.

13 EINSATZ DYNAMISCHER GEOMETRIE

Die Aufgaben haben wir bewusst in einem dynamischen Setting arrangiert. Dies ermöglicht uns, vertieft auf die dynamischen Tätigkeiten während des Problembearbeitungsprozesses einzugehen.

In diesem Kapitel gehen wir auf folgende Fragestellungen ein und führen die dazugehörigen Ergebnisse auf:

(II.1) Zeigen sich unterschiedliche Verwendungen beim Einsatz der dynamischen Geometriesysteme?

(II.2) In welchen Episoden kommen welche Tätigkeiten vor?

In einem ersten Teil beschreiben wir beispielhaft exemplarische, dynamische Tätigkeiten, die den einzelnen Kategorien und Unterkategorien zuzuordnen sind. Danach erläutern wir, in welchen Phasen des Problemlösens die unterschiedlichen Kategorien von dynamischen Tätigkeiten identifiziert wurden. Schliesslich wenden wir uns der übergeordneten Fragestellung zu:

(II) Ergeben sich durch die Bearbeitung am Computer allenfalls Erweiterungen oder Anpassungen am Phasenmodell von Rott?

13.1 Identifikation unterschiedlicher dynamischer Tätigkeiten

Bei der Analyse des Datenmaterials konnten wir unterschiedlich charakterisierte dynamische Tätigkeiten in Bezug auf die Arbeit mit dem GeoGebra-Applet feststellen. Wie bereits im Methodenteil beschrieben, haben wir für diese dynamischen Tätigkeiten induktiv verschiedene Kategorien gebildet. Wir unterscheiden grundsätzlich zwischen der Nutzung des GeoGebra-Applets zur Erkenntnisgewinnung und zur Darstellung und gegenseitigen Erklärung. Hierbei wird inhaltlich nicht mehr weitergearbeitet. Das Applet wird als Visualisierungshilfe für das gegenseitige Erklären oder für die schriftliche Dokumentation genutzt.

Bei der Kategorie *Erkenntnisgewinnung* wird inhaltlich am Problem weitergearbeitet. Die Probanden entwickeln Lösungswege, machen Entdeckungen und entwickeln Ideen weiter. Da wir auch innerhalb dieser Kategorie unterschiedliche dynamische Tätigkeiten identifizieren konnten, unterscheiden wir zwischen dem *entdeckenden Variieren*, der Erzeugung von *Spezialfällen* und der Variation nach *Invarianten*. Das *entdeckende Variieren* beinhaltet sowohl ein *planvolles* als auch ein *ungerichtetes Verändern*. Das planvolle Verändern grenzt sich dadurch vom ungerichteten Verändern ab, dass eine Absicht hinter der Tätigkeit geäussert wird. Ein planvolles Vorgehen kann einerseits ein zielgerichtetes Handeln sein, wobei einzelne Teilschritte nacheinander ausgeführt werden. Andererseits zählen wir es ebenso zu einem planvollen Verändern, wenn die Probanden am Applet manipulieren und genau beobachten, was passiert. Der Begriff „planvoll“ ist hier abzugrenzen von der Phase Planung / Ausführung im Phasenmodell von Rott.

13.1.1 Erkenntnisgewinnung

Im Folgenden werden die Ergebnisse zur Kategorie der Erkenntnisgewinnung beschrieben und dargestellt.

13.1.1.1 Entdeckendes Variieren

Das *entdeckende Variieren* konnten wir bei den Bearbeitungsprozessen aller Tandems bei beiden Aufgaben entweder in Form von *planvollem* oder von *ungerichtetem Verändern* identifizieren.

Für diese Unterkategorie beschreiben wir drei Beispiele. Zwei Beispiele für *planvolles Verändern* stammen aus den Daten der Aufgabe 2. Das dritte Beispiel für *ungerichtetes Verändern* stammt aus der Datensammlung der Aufgabe 1.

Beispiel 1: Planvolles Verändern (A2, T5, 00:06 bis 00:42) Phase *Exploration*

Die Probanden glauben zu wissen, dass das Quadrat mit dem GeoGebra-Applet erzeugt werden kann. Sie beginnen nun mit der Variation des Applets. Probandin M. verschiebt die Eckpunkte, während Proband N. Anweisungen gibt. Die vorliegende dynamische Tätigkeit wird in einer Phase der Exploration durchgeführt. Abbildung 67 zeigt chronologisch geordnete Standbilder aus dem Prozess der Erzeugung des Quadrates.

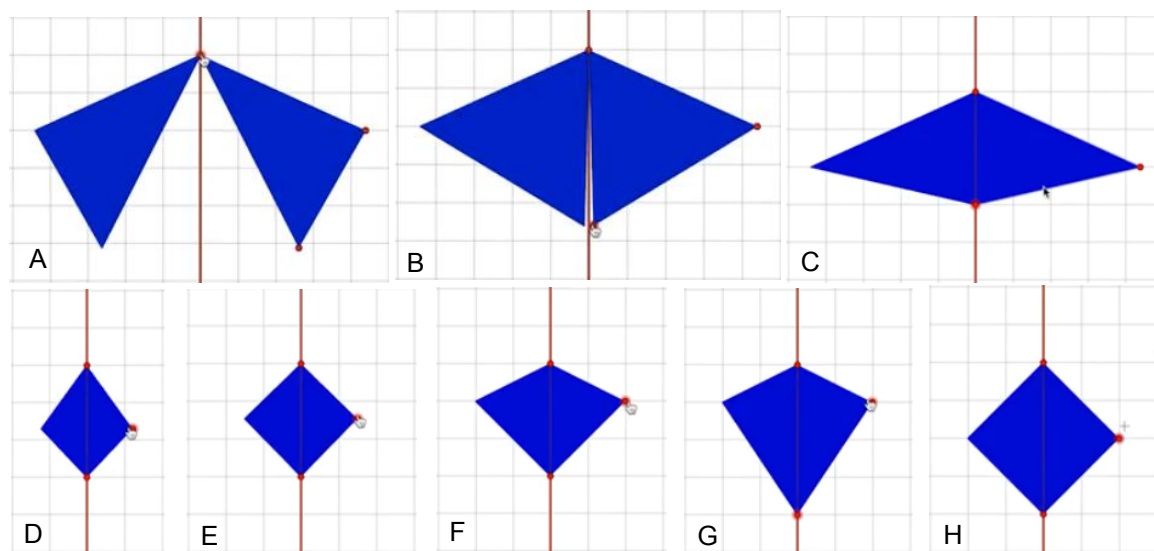


Abb. 67: A2, T5: planvolles Verändern am Quadrat

Wie aus dieser Abbildung ersichtlich wird, setzen die Probanden nicht von Beginn an die Eckpunkte des Quadrates in die finalen Positionen. Vielmehr verschieben sie die Eckpunkte und beobachten, wie sich die Figur verändert. Bis zur Figur in Bild E wirken die Veränderungen *nicht* zielgerichtet, da die Probanden die Eckpunkte „suchend“²¹ platzieren. Ab der Figur in Bild F sind auch die einzelnen Veränderungen der Eckpunkte zielgerichtet [„mach den eines hoch, den eines rüber“].

Beispiel 2: Planvolles Verändern (A2, T1, 00:09 bis 00:25) Phase *Planung / Ausführung*

Die Probanden vermuten sofort, dass das Quadrat mit dem GeoGebra-Applet erstellt werden kann, und beginnen gleich mit dessen Erzeugung. Die dynamischen Handlungen finden in einer Phase der *Planung / Ausführung* statt. Abbildung 68 zeigt chronologische Standbilder bei der Erzeugung des Quadrates.

²¹ Mit „suchend“ wird ein unsicheres Bewegen umschrieben. Die Probanden setzen die einzelnen Eckpunkte nicht zielgerichtet an ausgewählte Stellen, sondern verschieben sie langsam und nicht „treffsicher“.

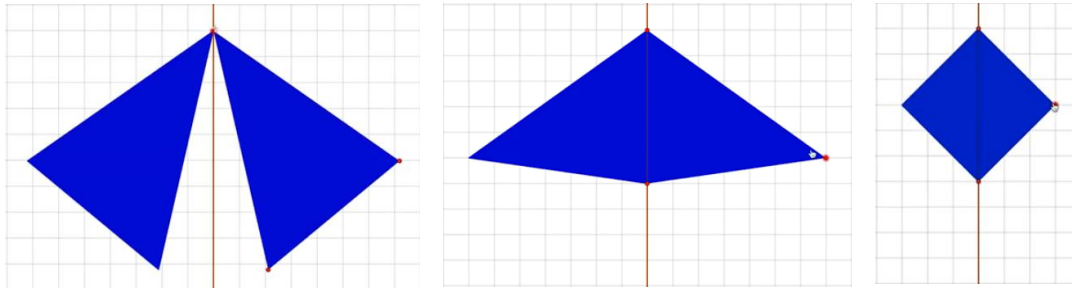


Abb. 68: A2, T1: Planvolles Verändern am Quadrat

Im Vergleich zu Tandem 5 gehen die Probanden von Tandem 1 von Beginn weg zielgerichtet vor. Die Verschiebungen aller drei Eckpunkte des Dreiecks erfolgen rasch und bestimmt. Wir eruieren nach den einzelnen Schritten keine Phasen, in denen die Probanden länger beobachteten und darüber nachdachten, was die eben getätigte Verschiebung bedeutete.

Beispiel 3: Ungerichtetes Verändern (A1, T1, 10:30 bis 10:44) Phasen *Exploration* und *Verifikation*

Die Probanden haben erkannt, dass die grüne Fläche stets ein Viertel einer Quadratfläche ist, und haben dies an verschiedenen Einzelfällen bereits erkundet und „berechnet“. Nun suchen die Probanden noch nach einer allgemeinen Begründung dieser Tatsache. Proband J. (von hinten rechts in Abb. 69) bedient das Applet. Beide fixieren den Bildschirm. J. bewegt das eine Quadrat diffus um das andere. Plötzlich kommt M. eine Idee, was er mit einem „wart’ hey“ quittiert. Die dynamische Handlung zeigt kein planvolles Vorgehen; zum Vorgehen wird keinerlei Absicht geäußert und die Bewegung hat einen Charakter von „Pröbeln“.

Diese dynamische Handlung findet im Übergang zwischen den Phasen *Exploration* und (inhaltliche) *Verifikation* statt. Proband M. erlangt dadurch einen Ansatz einer allgemeinen Begründung.

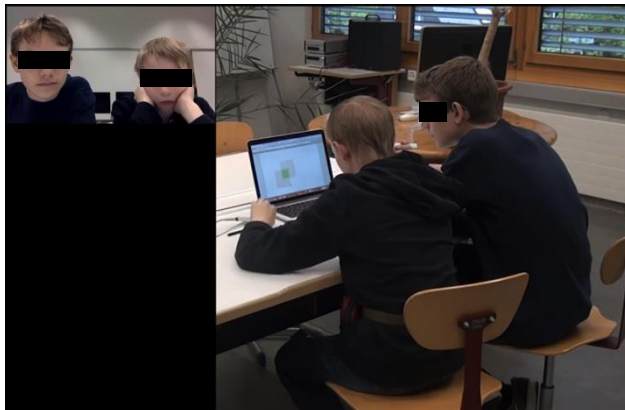


Abb. 69: A1, T1: synchronisierte Videos

13.1.1.2 Spezialfälle

Die Unterkategorie *Spezialfälle* konnten wir lediglich bei der Aufgabe 1 und zudem nur bei den Tandems 4 und 5 eindeutig identifizieren. Dazu beschreiben wir ein exemplarisches Beispiel von dynamischem Handeln im Bearbeitungsprozess von Tandem 4 (01:22 bis 01:45). Die Probanden befinden sich während dieser Tätigkeit im Übergang zwischen einer Phase der Analyse (spontane Äusserung zur Lösung) und der Exploration (heuristische Vorgehensweise).

Abbildung 70 zeigt eine chronologische Abfolge von Standbildern bei der Manipulation der Applet durch Probandin V.

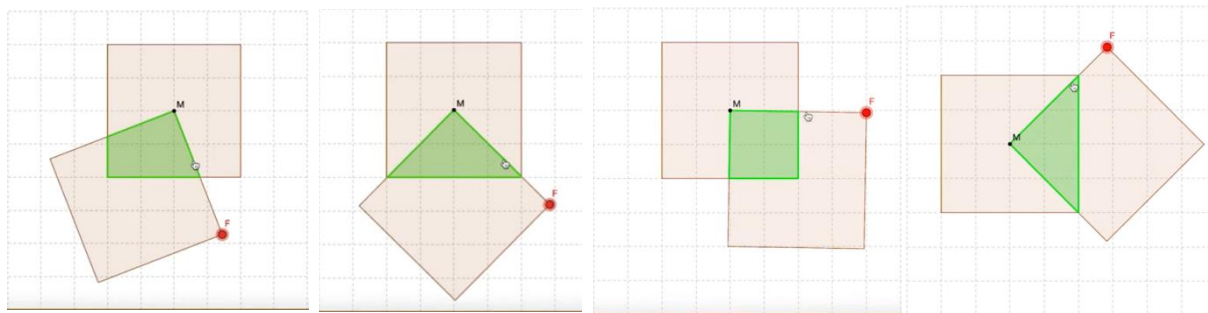


Abb. 70: A1, T4: Betrachtung von Spezialfällen

Proband D. hat gerade erkannt, dass die Fläche stets ein Viertel der Quadratfläche ist und sich diese Größe nicht verändert. Probandin V. wirkt noch nicht überzeugt, denn sie fragt beim Spezialfall Dreieck: „So auch?“. Danach bewegt sie das Quadrat langsam um das andere und stoppt jeweils kurz bei den Spezialfällen. Bei jedem Spezialfall bejaht sie die Tatsache, dass die grüne Fläche wieder einen Viertel der Quadratfläche darstellt.

Durch die dynamische Tätigkeit der *Erzeugung von Spezialfällen* gewinnen die Probanden die entscheidende Erkenntnis und demonstrieren sich gegenseitig deren Richtigkeit.

13.1.1.3 Invarianten

Die Unterkategorie Invarianten konnten wir lediglich in den Bearbeitungsprozessen der Aufgabe 2, dafür aber bei allen drei Tandems, identifizieren. Dazu illustrieren wir ein Beispiel von Tandem 4 (08:20 bis 08:53):

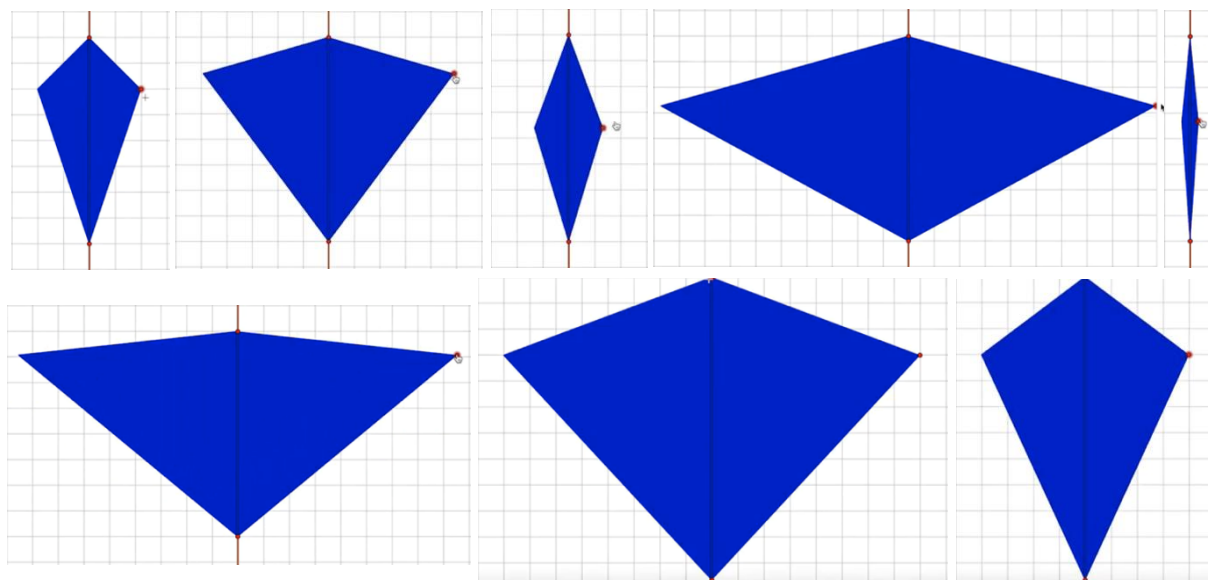


Abb. 71: A2, T4: Untersuchung nach Invarianten

Die Probanden haben eben gerade entdeckt, dass und wie sie das Drachenviereck mit dem GeoGebra-Applet erzeugen können. Sie erkunden dies nun mit der Absicht, die Eigenschaften des gespiegelten Dreiecks genauer zu beschreiben. Sie diskutieren darüber, ob es Winkel mit festen Eigenschaften gäbe (z.B. rechter Winkel). Zur Illustration verändert Proband D. das Drachen-

viereck mehrfach, indem er zuerst bloss die rechte, seitliche Ecke verschiebt. Die Probanden einigen sich jeweils darauf, dass es sich bei allen Formen um einen Drachenviereck handelt.

Die Probanden sprechen mehrfach über eine Invariante der Vierecksform Drachenviereck: Die Diagonalen [„e und f“] müssen senkrecht aufeinander stehen. Sie äussern sich zudem über die veränderlichen Eigenschaften des Drachenvierecks. Sie erkennen einerseits, dass die Länge der Seiten unterschiedlich sein kann [„sie sind nicht gleichschenkelig“], und andererseits, dass die Winkel spitz- oder stumpfwinklig sein können. Ausserdem erkennen sie, dass ein Rhombus entsteht, wenn die Seiten des Drachens gleich lang sind.

Dieses Beispiel zeigt exemplarisch die Nutzung des GeoGebra-Applets mit der Absicht, veränderliche Merkmale auszuloten. Die Probanden verändern die Applet nach einer „Theorie“ - sie sind sich einer Invarianten (Eigenschaft, dass die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen) der Vierecksform bewusst. Sie variieren die restlichen Eigenschaften mit der Absicht zu prüfen, ob noch andere invariante Eigenschaften vorliegen.

13.1.2 Darstellung und gegenseitiges Erklären

Die Kategorie *Darstellung und gegenseitiges Erklären* konnten wir bei beiden Aufgaben bei allen drei Tandems identifizieren. Dazu erläutern wir zwei Beispiele - je eines zur Aufgabe 1 und zur Aufgabe 2.

Beispiel 1: Gegenseitiges Erklären (A1, T5, 01:49 bis 02:02) Phase *Planung / Ausführung*

Bei der ersten Aufgabe hat Proband N. von Tandem 5 eben gerade das Problem gelöst. Er hat eine Begründung gefunden, weshalb die grüne Fläche stets gleich gross ist [„genau so viel wie auf der einen Seite hinzu kommt, geht auf der anderen Seite weg“]. Nun beginnt er, Probandin M. seine Idee zu erklären. Abbildung 72 zeigt einen Screenshot von den synchronisierten Videos.

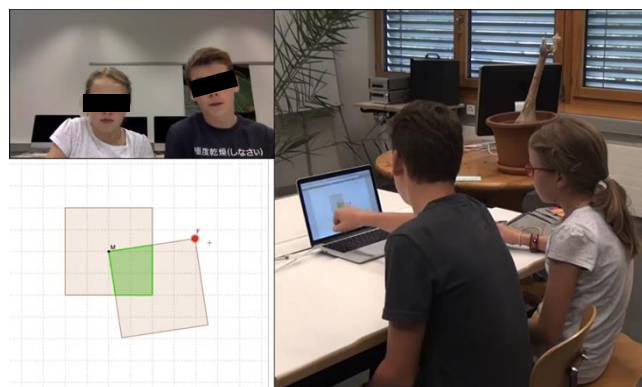


Abb. 72: A1, T5: synchronisierte Videos

Probandin M. dreht auf die Anweisung von Proband N. im Applet das eine Quadrat langsam um das andere. N. erklärt ihr währenddessen seinen Lösungsansatz durch Zeigen auf den Bildschirm. Die Applet wird in dieser Episode nicht zur Erkenntnisgewinnung, sondern als Hilfsmittel für ein *gegenseitiges Erklären* genutzt.

Beispiel 2: Gegenseitiges Erklären (A2, T5, 02:46 bis 02:42) Phase *Verifikation*

Bisher haben die Probanden alle drei möglichen Vierecksformen erzeugt und die Eigenschaft „achsensymmetrisch“ als Ordnungskriterium ermittelt. Die Probanden beabsichtigten zuvor, ein gleichschenkeliges Trapez zu erzeugen. Sie vermuteten, dass bloss das gleichschenkelige Trapez

funktionieren sollte, weil dieses eine Symmetrieachse besitzt. Probandin M. hat korrekterweise erkannt, dass sie mit der GeoGebra-Applet kein Trapez erzeugen kann. Sie visualisiert ihre Erkenntnis mit dem Bewegen der Eckpunkte (siehe Abbildung 73) und kommentiert: „Nein, es geht nicht. Denn schau, wenn ich das hier nach aussen ziehe (untere Ecke), dann geht es ja auseinander. Es geht nicht!“

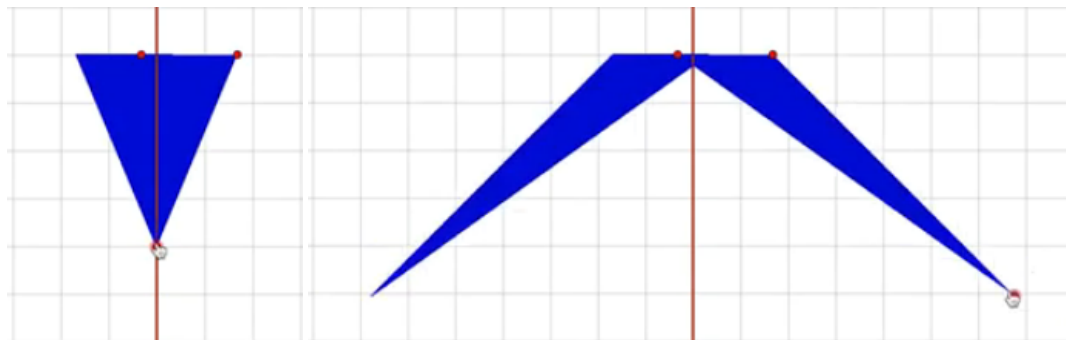


Abb. 73: A2, T5: Bildschirmaufnahmen beim *gegenseitigen Erklären*

In dieser Phase der Verifikation dient die Applet zur Visualisierung einer Erkenntnis. Interessant scheint bei diesem Beispiel ausserdem, dass das Applet bei einer Vierecksform, die nicht erzeugt werden kann, zur *Darstellung* und als Hilfsmittel beim *gegenseitigen Erklären* genutzt wurde. Dies ist das einzige Beispiel, das wir in den sechs Aufnahmen eruieren konnten, in welchem die Probanden das Applet dazu nutzen.

13.1.3 Zusammenfassung

Wir konnten bei der Analyse der Problembearbeitungsprozesse unterschiedliche Nutzungen der dynamischen Geometrie identifizieren. Grundsätzlich konnten wir zwischen den dynamischen Tätigkeiten der vier Kategorien unterscheiden. Beim *entdeckenden Variieren* liessen sich nur feine Unterschiede zwischen dem *planvollen* und dem *ungerichteten Verändern* feststellen. Die dazu codierten Tätigkeiten der Probanden gingen zum Teil ineinander über.

13.2 Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen

Die unterschiedlich codierten dynamischen Tätigkeiten haben wir in den Exports der SWITCHcast Annotationen den einzelnen Episoden zugeordnet (vgl. Codiermanual Anhang C). Im folgenden Kapitel zeigen wir auf, in welchen Phasen der Problemlöseprozesse welche dynamischen Tätigkeiten bei den einzelnen Aufgaben identifiziert wurden.

13.2.1 Aufgabe 1

Die Kategorie *Invarianten* codierten wir bei der Aufgabe 1 bei keinem der drei Tandems (vgl. Kapitel 13.1.1.3). Alle anderen Kategorien konnten wir über die drei Tandems hinweg identifizieren. Die Kategorien *Spezialfälle / Extremalfälle*, *entdeckendes Variieren* und *Darstellung / gegenseitiges Erklären* haben wir jeweils mehrfach und in verschiedenen Phasen codiert. In der Kategorie des *entdeckenden Variierens* codierten wir das *ungerichtete* mehrfach und in allen Phasen (inklusive dem Schreiben). Das *planvolle*, entdeckende Variieren zeigte einzig Tandem 5 - dies in einer Phase der Planung / Ausführung. Die dynamischen Tätigkeiten zeigten die Probanden von Tandem 1 und Tandem 4 zu grossen Teilen in der Phase der Exploration. Das Applet

wurde von allen Probanden mehrfach und mit Ausnahme der Analyse in allen Phasen des Problemlösemodells zur *Darstellung* und der *gegenseitigen Erklärung* genutzt.

Aufgabe 1, Tandem 1	Entdeckendes Variieren (planvoll)	Entdeckendes Variieren (ungerichtet)	Spezialfälle / Extremfälle	Invarianten	Darstellung / gegenseitiges Erklären
Analyse					
Exploration		4	5		1
Planung / Ausführung					
Verifikation					2
Schreiben			1		2

Tab. 7: A1, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen

Aufgabe 1, Tandem 4	Entdeckendes Variieren (planvoll)	Entdeckendes Variieren (ungerichtet)	Spezialfälle / Extremfälle	Invarianten	Darstellung / gegenseitiges Erklären
Analyse		1			
Exploration		3	1		3
Planung / Ausführung					
Verifikation					
Schreiben		1			1

Tab. 8: A1, T4: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen

Aufgabe 1, Tandem 5	Entdeckendes Variieren (planvoll)	Entdeckendes Variieren (ungerichtet)	Spezialfälle / Extremfälle	Invarianten	Darstellung / gegenseitiges Erklären
Analyse		1			
Exploration		1			
Planung / Ausführung	1	2			1
Verifikation		1			
Schreiben		1			3

Tab. 9: A1, T5: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen

13.2.2 Aufgabe 2

Wir codierten bei der Aufgabe 2 in keiner Episode *Spezialfälle / Extremfälle* (vgl. Kapitel 13.1.1.2). In der Phase der Exploration konnten wir ausser den *Spezialfällen / Extremfällen* alle anderen Kategorien über die drei Tandems gesehen feststellen. Das Tandem 5 zeigte hier vier verschiedene Nutzungsarten. Die Kategorie *Invarianten* codierten wir bei den Tandems 1, 4 und 5 in der Phase der Exploration. Beim Tandem 1 trat sie aber auch in der Phase der Planung / Ausführung und beim Schreiben auf. Tätigkeiten, die wir als *Invarianten* und *Darstellung / gegenseitiges Erklären* codierten, kamen in allen Phasen ausser in der Analyse vor. *Ungerichtetes, entdeckendes Variieren* codierten wir in allen Phasen mindestens einmal.

Aufgabe 2, Tandem 1	Entdeckendes Variieren (planvoll)	Entdeckendes Variieren (ungerichtet)	Spezialfälle / Extremalfälle	Invarianten	Darstellung / gegenseitiges Erklären
Analyse					
Exploration		5		1	
Planung / Ausführung	3			1	1
Verifikation				1	
Schreiben		1		1	1

Tab. 10: A2, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen

Aufgabe 2, Tandem 4	Entdeckendes Variieren (planvoll)	Entdeckendes Variieren (ungerichtet)	Spezialfälle / Extremalfälle	Invarianten	Darstellung / gegenseitiges Erklären
Analyse					
Exploration				3	
Planung / Ausführung	3				1
Verifikation		1			
Schreiben					

Tab. 11: A2, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen

Aufgabe 2, Tandem 5	Entdeckendes Variieren (planvoll)	Entdeckendes Variieren (ungerichtet)	Spezialfälle / Extremalfälle	Invarianten	Darstellung / gegenseitiges Erklären
Analyse	1	1			
Exploration	2	3		1	1
Planung / Ausführung	1	1			
Verifikation					2
Schreiben					1

Tab. 12: A2, T1: Einteilung der dynamischen Tätigkeiten nach Phasen

13.2.3 Einfluss auf das Phasenmodell

Die Ergebnisse zur dynamischen Geometrie zeigen uns, dass keine Notwendigkeit besteht, eine zusätzliche Phase im Phasenmodell von Rott (2013) einzuführen. Die Tätigkeiten, die mit der Nutzung der dynamischen Geometrie im Zusammenhang stehen, sind Bestandteile innerhalb der codierten Episoden und stellen somit keine eigenen Phasen dar. Die codierten Tätigkeiten der dynamischen Geometrie sind nicht auf eine einzelne Phase limitiert, sondern wurden von den Probanden zu unterschiedlichen Zeitpunkten und in unterschiedlichen Phasen für den Problembearbeitungsprozess genutzt.

IV. Diskussion

14 PHASENMODELL

Unsere Ergebnisse zum Phasenmodell von Rott (2013) zeigen, dass dieses als deskriptives Phasenmodell zur Analyse von Problembearbeitungsprozessen von Lernenden der Sekundarstufe I anwendbar ist. Über die gesamte Datenbasis hinweg konnten wir sämtliche Phasen (nach Schoenfeld 1985 und Rott 2013) identifizieren. Ausserdem war es uns möglich, in den analysierten Problembearbeitungsprozessen Phasenwechsel zwischen sämtlichen Phasen (mit Ausnahme des Wechsels zwischen der Analyse und der Verifikation) zu beobachten.

In diesem Kapitel setzen wir uns mit unseren Daten zu den Prozessverläufen der Probanden auseinander und verknüpfen diese mit den Ergebnissen aus der Studie von Rott (2013).

14.1 Prozessverläufe

Bei der Analyse der Videodaten sind uns zwei Aspekte hinsichtlich der Prozessverläufe aufgefallen: Die Prozessverläufe haben sich grundsätzlich in Reihenfolge und Anzahl Phasen unterscheiden. Zusätzlich konnten wir aber auch Unterschiede zwischen den beiden Aufgaben feststellen.

14.1.1 Reihenfolge und Anzahl der Phasen

Die Ergebnisse unserer explorativen Fallstudie zeigen uns, dass unterschiedliche Prozessverläufe zum Erfolg führen können. Sowohl lineare Prozessverläufe als auch solche, bei welchen Rückschritte vollzogen worden sind, konnten in unserer Datenbasis zum Erfolg führen. Als Beispiel hierfür weisen wir auf die Unterschiedlichkeit der Phasendurchläufe der Tandems 1 und 5 bei der ersten Aufgabe „das drehende Quadrat“ hin:

Bei Tandem 5 konnten wir einen linearen Prozessverlauf (nach Pólya 1945) feststellen. Diese Bearbeitung führte zu einem erweiterten Ansatz der Problemlösung. Bei Tandem 1 hingegen konnten wir einen zyklischen Prozessverlauf mit mehreren Phasenübergängen und Rückschritten erkennen. Der eine Proband näherte sich einer erfolgsversprechenden Begründung, welche jedoch von seinem Tandempartner nicht akzeptiert und schliesslich wieder verworfen wurde. Diesen „Ansatz“ einer allgemeinen Begründung konnten wir in der Bewertung des Problemlöseprozesses nicht berücksichtigen, da die Probanden diese Idee weder in der Dokumentation noch in der anschliessenden Besprechung ihrer Ergebnisse erwähnt hatten. Deshalb wurde dieser Problembearbeitungsprozess als *einfacher Ansatz* bewertet. Aus dem Bearbeitungsprozess hätte sich jedoch durchaus ein *erweiterter Ansatz* entwickeln können, hätten die Probanden an dieser Idee festgehalten.

Wie Rott (2013) dies mehrfach betont, handelt es sich bei seinem empirischen Modell um ein deskriptives Phasenmodell, das auch *Rückschritte* im Prozessverlauf vorsieht. Auch in unserer Untersuchung konnten wir verschiedene Rückschritte in den Prozessverläufen der Probanden identifizieren. Zu den Rückschritten bei der Aufgabe 1 „das drehende Quadrat“ lässt sich aufgrund der kleinen Datenmenge nichts sagen. Bei der Aufgabe 2 „Vierecke aus zwei Dreiecken“ sieht es jedoch so aus, als könnten Rückschritte im Problembearbeitungsprozess auch förderlich oder gar notwendig sein für eine erfolgreiche Bearbeitung. Als Beispiel hierfür verweisen wir auf die Bearbeitung dieser Aufgabe von Tandem 5:

Die Probanden entdeckten ein erstes Kriterium (Achsensymmetrie), anhand dessen sie entscheiden wollten, ob man mit dem Applet eine Vierecksform erstellen kann oder nicht. Bei Schritt 4 im Prozessverlauf (Abb. 74) überprüfen sie dieses Kriterium und wenden dieses danach (Schritte 5 und 6) auf weitere Vierecksformen an. Sie bemerken dadurch, dass das Kriterium Achsensymmetrie als einziges nicht ausreicht, um zu entscheiden, ob man eine Vierecksform durch die Spiegelung eines Dreieckes erzeugen kann. Bei Schritt 7 entwickeln die Probanden ihre Idee weiter und ergänzen als weiteres Kriterium, dass die Symmetrieachse die Vierecksform in zwei Dreiecke teilen muss. Durch diese identifizierten Rückschritte konnten die Probanden ihr Kriterium weiterentwickeln und schliesslich eine korrekte, geprüfte Lösung des Problems angeben. In diesem Beispiel waren die Rückschritte für den Problembearbeitungsprozess förderlich.

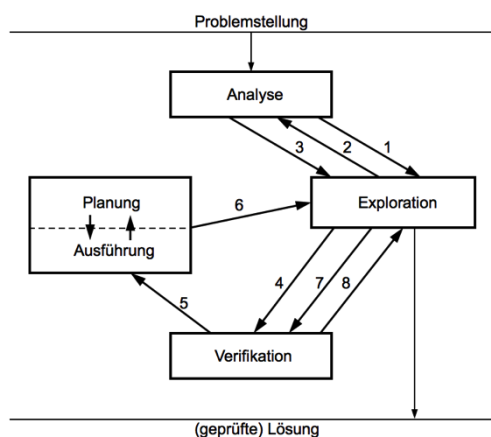


Abb. 74: A2, T5: Prozessverlauf

Der von Schoenfeld (1985) eingeführte und von Rott (2013) operationalisierte Begriff „Wild Goose Chase“²² beschreibt ein Verhalten, bei welchen die Problemlöser nach dem Lesen direkt oder gegebenenfalls nach einer kurzen Phase der *Analyse* in die *Exploration* übergehen (Rott 2013, 302). Dementsprechend werden Prozessverläufe, in welchen lediglich die Phasen *Analyse* und *Exploration* codiert wurden, als „Wild Goose Chase“ bezeichnet. Die codierten Episoden Schreiben, Organisation und Abschweifung ändern an dieser Definition nichts. Auch bei unserer Bearbeitung konnten wir einen solchen Prozessverlauf identifizieren. Bei der Aufgabe 1 bearbeitet von Tandem 4 wurde nach einer kurzen Phase der *Analyse* (in welcher sich die Probanden spontan zur Lösung geäußert haben) ausschliesslich *Exploration* codiert. Dass diese Bearbeitung in einem *einfachen*, unbegründeten Ansatz der Lösungsangabe endete, überrascht uns hier kaum, da hinter der *Exploration* oftmals eine weite Suche im Problemfeld steckt. Bereits Schoenfeld (1985) stellte die These auf, dass zwischen einem Prozessverlauf nach „Wild Goose Chase“ ein enger Zusammenhang mit einer kaum erfolgreichen Bearbeitung bestünde. Rott (2013, 307) konnte diesen Zusammenhang in seiner Studie statistisch bestätigen. Aufgrund der kleinen Stichprobe können wir in unserer Untersuchung zwar keinen direkten Zusammenhang zwischen einem „Wild Goose Chase“ und einer kaum erfolgreichen Bewertung zeigen, jedoch lassen die Ergebnisse mit dem Einbeziehen der Theorie einen solchen vermuten.

²² „Wild Goose Chase“ kann metaphorisch als *vergebliches Bemühen* übersetzt werden (Rott 2013, 300).

14.1.2 Vergleich der beiden Aufgaben

Wenn wir die Prozessverläufe der beiden Aufgaben vergleichen, können wir feststellen, dass alle drei Tandems bei der zweiten Aufgabe „Vierecke aus zwei Dreiecken“ mehr Phasenwechsel durchlaufen haben als bei der ersten Aufgabe „das drehende Quadrat“. Zwischen dieser Beobachtung und der Bewertung der Aufgabe konnten wir jedoch keinen Zusammenhang feststellen. Wie bereits in Kapitel 11 mehrfach erwähnt, können wir keinen Zusammenhang zwischen einer erfolgreichen Bearbeitung und einem bestimmten Prozessverlauf feststellen. Wir vermuten daher einen Zusammenhang zwischen den häufigeren Phasenwechseln und dem Problemcharakter, beziehungsweise dem Aufgabentyp von Aufgabe 2. Die Aufgabe „Vierecke aus zwei Dreiecken“ hat im Vergleich zur ersten Aufgabe den Charakter von „Teilaufgaben“. Über die Lösung von mehreren kleinen Problemen (die Erzeugung der einzelnen Vierecksformen) gilt es, das übergreifende Problem, die Begründung dafür, welche Vierecksformen durch die Applet erzeugt werden können, zu lösen. Grundsätzlich können wir dazu keine allgemeingültigen Aussagen machen. Wir vermuten jedoch, dass diese Art der Aufgabenstellung mehr Phasenwechsel anregen kann. Diese These stützen wir mit der Beobachtung, dass einzelne Phasen (insbesondere *Planung / Ausführung* und *Verifikation*) auf zwei unterschiedlichen Ebenen auf der Ebene einer einzelnen Vierecksform oder auf der Ebene einer allgemeinen Begründung codiert wurden.

14.2 Erläuterungen zu einzelnen Phasen

In diesem Abschnitt gehen wir auf Auffälligkeiten innerhalb der einzelnen Phasen ein. In Anlehnung an Rott (2013) versuchen wir diese zu deuten und in Bezug zueinander zu setzen.

14.2.1 Analyse

Die Phase *Analyse* haben wir bei beiden Aufgaben jeweils nur kurz und sehr selten codiert. Ein Durchdringen der Aufgabenstellung konnten wir (insbesondere auch im Vergleich zu Rott 2013) nur äusserst selten erkennen. Ein Grund dafür wird sein, dass wir die Aufgaben vor der Bearbeitung bereits kurz vorgestellt haben. Zusätzlich verhalf das Applet durch die grafische Veranschaulichung zu einem besseren und schnelleren Verständnis der Aufgabenstellung. Zudem regte die ikonische Darstellung die Probanden dazu an, sich spontan zur Lösung zu äussern. Solche spontane Äusserungen, die zur Phase der *Analyse* gehören, konnten wir über alle Bearbeitungen oft codieren. Die spontane Äusserung schien nicht nur sehr oft den Einstieg in den Bearbeitungsprozess darzustellen, sondern auch eine vertiefte Beschäftigung mit dem Problem zu initiieren.

Das Label spontane Äusserung ähnelt einer „Illumination“ - einem Gedankenblitz - nach Poincaré und Wallas (1926, zit. nach Rott 2013, 41f.). Dadurch, dass die spontanen Äusserungen bei allen Tandems zu Beginn des Prozesses und ohne vorherige Bearbeitungen gemacht wurden, gehören sie für uns klar zur Phase der *Analyse*.

14.2.2 Exploration

Die *Exploration* nahm mit Ausnahme der Aufgabe 1 von Tandem 5 bei allen Problembearbeitungsprozessen viel Zeit in Anspruch. Auch bei Rott (2013) war dies im Allgemeinen der Fall. Bei

unseren Untersuchungen vermuten wir den Grund für ein ausgeprägtes Explorationsverhalten hauptsächlich im Aufgabensetting. Einerseits könnten die Aufgabenformulierungen das erkundende Verhalten fördern. Andererseits wird aber auch das dynamische Setting einen Einfluss auf das Explorationsverhalten der Probanden haben. Darauf kommen wir jedoch im Kapitel 15 vertieft zu sprechen.

14.2.3 Planung / Ausführung

Die Phasen *Planung* und *Ausführung* haben wir ausschliesslich gemeinsam als *Planung / Ausführung* codiert. In keinem einzigen Fall konnten wir eine Planung ohne Ausführung identifizieren. Auf der anderen Seite macht die *Ausführung* ohne Plan keinen Sinn - ein impliziter Plan muss vorhanden sein. Auch dadurch, dass die *Planung* und *Ausführung* auch im Phasenmodell von Rott (2013) als gemeinsame Phase dargestellt wird, scheint eine Trennung kaum sinnvoll.

Die Phase *Planung / Ausführung* haben wir nicht bei beiden Aufgaben gleich oft codiert. Dies führen wir auf die Aufgabenstellung zurück. Bei der ersten Aufgabe haben wir insgesamt bloss zwei Episoden *Planung / Ausführung* codiert, da es wenige Tätigkeiten gibt, die als solche codiert werden könnten.

14.2.4 Verifikation

Über alle sechs Problembearbeitungsprozesse konnten wir zehn Phasen der *Verifikation* codieren; drei bei der ersten Aufgabe, sieben bei der zweiten. Bei letzterer gilt es jedoch zu beachten, dass sich lediglich vier der sieben Verifikationen auf der Ebene einer allgemeinen Begründung befinden. Dennoch stellen wir dabei im Vergleich zu den Ergebnissen von Rott (2013) fest, dass wir verhältnismässig öfter die Phase der *Verifikation* codiert haben, als Rott dies gemacht hatte²³. Insgesamt konnte Rott (2013, 303) bloss 20 Phasen der *Verifikation* in 108 Prozessen codieren. Diese Differenz werten wir als nicht zufällig. Wir sehen den Grund dafür zum einen in der Aufgabenstellung. Im Gegensatz zu Rott haben wir in unseren Aufgaben jeweils explizit nach einer Begründung der Erkenntnisse gefragt. Dies widerspiegeln auch Äusserungen der Probanden, in welchen sie bemerken, dass es ja noch eine Begründung braucht. Zum anderen vermuten wir auch hier wieder den Einfluss der dynamischen Geometrie: Das Applet dient als ideales Hilfsmittel für das *gegenseitige Erklären*. Darauf beziehen wir uns jedoch später noch vertieft.

Wir stellten uns die Frage, ob die erfolgreiche Bearbeitung des Problems mit der Durchführung einer *Verifikation* in einem Zusammenhang steht. Eindeutige Ergebnisse haben wir mit unserer qualitativen Fallstudie keine. Unsere Daten lassen jedoch einen (womöglich indirekten) Zusammenhang zwischen der erfolgreichen Bearbeitung und der Durchführung einer Reflexion *vermuten*. Bei der ersten Aufgaben haben die Tandems 1 und 5 jeweils eine inhaltliche *Verifikation* durchgeführt und im Vergleich zu Tandem 4, bei welchem wir keine *Verifikation* codiert haben, eine bessere Bewertung erhalten. Die genaue Betrachtung der einzelnen Episoden lässt uns vermuten, dass Phasen der Verifikation den ganzen Prozess positiv beeinflussten. Bei der Aufgabe 2 konnten wir bei allen drei Tandems eine *Verifikation* codieren - jedoch fand diese bei Tandem 4, das wiederum die schlechteste Bewertung erhielt, lediglich auf der Ebene eines Einzelfal-

²³ Rott konnte bei insgesamt 98 Prozessen lediglich in 14 Prozessen *Verifikation* codieren.

les und nicht auf der übergeordneten Ebene (wie dies bei den beiden anderen Tandems der Fall war) statt. Bei der Variante der Aufgabe von Rott (2013, 311) „das drehende Quadrat“ wiesen vier der 32 Prozesse eine Phase der *Verifikation* auf. Jeder der vier Prozesse war erfolgreich (vgl. ebd. 2013, 311). Einen eindeutigen Zusammenhang konnte Rott (2013, 311) aufgrund der kleinen Datenmenge in diesem Bereich jedoch nicht zeigen. Er weist ausserdem darauf hin, dass ein direkter Zusammenhang nicht zu erwarten sei und dass die *Verifikation* mehrheitlich zum Schluss des Bearbeitungsprozesses stattfindet und für das Ergebnis kaum erheblich sein würde (ebd. 2013, 311). An dieser Stelle verweisen wir erneut auf die Unterschiede unserer Aufgabenformate zu denen von Rott (vgl. Stoffdidaktische Aufgabenanalyse Abschnitt 7.1.2): Die Lösung unserer beider Problemaufgaben liegt in einer allgemeinen Begründung von einzelnen Erkenntnissen, die dank dem Einsatz dynamischer Geometrie und geeigneter Hilfestellungen nicht schwierig zu gewinnen sind. Diese Begründungen sind bei den Aufgaben von Rott (2013) nicht verlangt. Die *Verifikation* gewinnt dadurch bei unseren Untersuchungen mehr an Bedeutung - eine erfolgreiche Bearbeitung des Problems konnte nur erreicht werden, wenn eine allgemeine Begründung vorlag.

Des Weiteren konnten wir in den vorliegenden analysierten Problembearbeitungsprozessen mehrere Phasen der *Verifikation* innerhalb der Prozesse identifizieren, die wesentlich zur weiteren Bearbeitung des Problems beigetragen hatten: Hier sei wieder auf die Weiterentwicklung des Lösungskriteriums bei Aufgabe 2 von Tandem 5 zu verweisen.

14.2.5 Schreiben

Der *Schreib*prozess beanspruchte bei allen Bearbeitungsprozessen am meisten Zeit. Es stellt sich hier die Frage, ob dieser grosse Zeitanteil überhaupt gerechtfertigt werden kann. In den analysierten Videodaten konnten wir jedoch etliche *Schreib*phasen beobachten, die inhaltlich einen Nutzen erbracht haben. Diese Phasen hatten nicht den Charakter von gedankenverlorenem „Kritzeln“ oder Zeichnen. Vielmehr feilten die Probanden gemeinsam an Formulierungen und überlegten sich, wie eine Erkenntnis optimal grafisch dargestellt werden könnte. Die Probanden haben sich während den *Schreib*phasen oftmals intensiv mit dem Problem auseinandergesetzt. Auch Haug (2012, 65) betont in seiner Studie, dass die Ausformulierung neuer Erkenntnisse differenziertes Wissen und Nachdenken über Begriffe und deren Eigenschaften erfordert, was ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts darstellt. Somit ist es auch gerechtfertigt, dass wir als Lehrpersonen im Mathematikunterricht oft den Anspruch haben, dass neue Erkenntnisse und Begründungen (oftmals auch in Form von Problemaufgaben) schriftlich festgehalten werden.

14.3 Fazit

Die Auswertung der Daten hat uns gezeigt, dass unterschiedliche Prozessverläufe zum Erfolg führen können. Vor allem sind Rückschritte nicht als etwas Negatives zu werten, sondern gehören wahrscheinlich ganz selbstverständlich auch zu erfolgreichen Problemlöseprozessen. Hinsichtlich dieser Tatsache erweist sich das deskriptive Phasenmodell von Rott (2013) als praxistauglich. Die Datenanalyse zeigte uns, dass verschiedene Problemlöseaufgaben unterschiedliche Tätigkeiten anregen (vgl. Rott 2013, 313). Auch wie die Aufgaben formuliert sind, hat wahr-

scheinlich einen grossen Einfluss darauf, welche Phasen bei der Bearbeitung durchlaufen werden.

15 DYNAMISCHE GEOMETRIE

Die dynamische Geometrie spielt eine wichtige Rolle bei den untersuchten Problembearbeitungsprozessen. Sie regte die Probanden an, intensiv an den vorgegebenen Aufgabenstellungen zu arbeiten.

15.1 Nutzung des DGS

Die Auswertungen der Videodaten zeigten, dass die Probanden das Applet zur Problembearbeitung in allen Phasen miteinbezogen hatten. Dadurch, dass die Aufgaben auf den Applets basieren, verwundert dies auf den ersten Blick nicht. Es wäre den Probanden aber durchaus auch offen gestanden, die Aufgaben auf den Dokumentationsblättern zu lösen und diese nicht nur zum Dokumentieren zu verwenden. Durch das Design der Aufgaben waren die Probanden in Bezug auf die dynamischen Geometriesysteme auf den Zugmodus beschränkt. Was aber durchaus Sinn ergab, da die Probanden somit keinerlei Anwendungswissen brauchten. Der in der Literatur zur Mathematikdidaktik beschriebene Nutzen des Zugmodus kam bei der Analyse der Problembearbeitungsprozesse klar zum Tragen. Der Mehrwert lag darin, dass die Probanden einfach verschiedene Beispiele herstellen konnten, wie dies Weigand und Weth (2002, 160) beschreiben. Im Folgenden wird der Einsatz der dynamischen Geometrie durch die Probanden, der in den einzelnen induktiven Kategorien festgestellt wurde, diskutiert.

15.1.1 Entdeckendes Variieren

Episoden, die wir mit den Labels *planvolles Verändern* und *ungerichtetes Verändern* codierten, kamen sehr oft vor. Dies ist wahrscheinlich trotz der kleinen Stichprobe nicht zufällig, da das Aufgabensetting die Probanden dazu anregte, Verschiedenes auszuprobieren. Die direkte Rückmeldung, welche die Probanden durch das Verändern am Applet bekamen (Barzel, Hussmann u. Leuders 2009, 39ff.), animierte sie dazu, hartnäckig an den Aufgabe zu arbeiten und bei einem Misserfolg nicht gleich aufzugeben. Dieser Umstand ist vermutlich vor allem dem kleineren Aufwand durch die Erzeugung von Varianten mit dem Applet geschuldet. Auch nach Phasen, in denen der Bearbeitungsprozess beendet schien, war für die Probanden die Hürde niedrig, nochmals mit *entdeckendem Variieren* im Problemraum weiter zu suchen. In Episoden des *entdeckenden Variierens* zeigte sich, dass auch Tandems, die nicht genau wussten, wie sie entweder in die Problembearbeitung einsteigen oder innerhalb des Prozesses weiterfahren sollten, von dem dynamischen Setting profitierten. Darauf führen wir zurück, dass die Arbeit mit Applets durchaus auch eine positive Auswirkung auf die Ausdauer hat und motivationsfördernd sein kann.

15.1.2 Spezialfälle

Die Ergebnisse zu den *Spezialfällen* verwundern uns bei einer näheren Betrachtung nicht. Dass wir diese Kategorie nur bei der Aufgabe 1 codierten, ist den Bearbeitungsinhalten der Aufgabe geschuldet. So erzeugten die Probanden zwar bei der Aufgabe 1 Spezialfälle; wir codierten diese Episoden jedoch teilweise mit den Labels des *entdeckenden Variierens*, da die Spezialfälle durch Zufall entdeckt wurden. So ist es zu erklären, dass wir nicht bei allen ausgewerteten Tandems

Spezialfälle codierten, obwohl die Aufgabe 1, ohne auf die Spezialfälle zu stossen, kaum zu bearbeiten ist.

15.1.3 Invarianten

Der von Kimeswenger und Hohenwarter (2015, 173) beschriebene Umstand, dass das Verändern von ikonischen Darstellungen den Lernenden die Möglichkeit bietet, geometrische Figuren auf ihre Invarianz zu überprüfen, konnte bei der ausgewerteten Stichprobe beobachtet werden. In diesem Punkt sehen wir einen grossen Vorteil, der durch den Einsatz der dynamischen Geometrie zum Tragen kommt. Dass wir *Invarianten* nur in Aufgabe 2 codierten, überrascht nicht weiter, da die Erarbeitung eines Begriffsumfanges bei dieser Aufgabe naheliegender war. Auch wenn die von den Tandems festgestellten und diskutierten invarianten Eigenschaften nicht in der Aufgabenstellung explizit verlangt waren, trugen sie aus unserer Sicht positiv zu den Problembearbeitungsprozessen bei. Beispielsweise festigte das Erzeugen von verschiedenen Varianten des Drachenvierecks (vgl. Kapitel 13.1.1.3) einerseits den Begriff der Vierecksform. Andererseits gewannen die Probanden dadurch die Gewissheit, dass sie nicht zufällig auf einen Spezialfall gestossen waren. Wie bereits erwähnt, war dies nicht explizit Teil der gesuchten Lösung und kam darum auch vorwiegend in der Phase der Exploration vor, da sich die Probanden zum Teil etwas weiter weg von der Aufgabenstellung bewegten. Bei der Auswertung der Videodaten war aber klar ersichtlich, dass beim Tandem 4 nach dem Finden des ersten Drachens sofort die Frage auftauchte, wie sich diese Figur eigentlich von anderen abgrenzt. Durch die einfache Möglichkeit, diese Invarianz mit Hilfe der dynamischen Geometrie auszuloten, gingen die Probanden dieser Frage, welche bei ihnen durch die Aufgabe provoziert wurde, nach. Die Probanden des Tandems 1 zeigten das Bedürfnis die verschiedenen Vierecksformen voneinander abzugrenzen besonders ausgeprägt. Die Folge daraus war, dass wir bei ihnen darum auch in allen Phasen ausser der Analyse *Invarianten* codierten. Sie bezogen sich für ein besseres Verständnis und um die Gewissheit zu bekommen, dass sie auf der richtigen Spur sind, immer wieder auf invariante Eigenschaften der Vierecksformen.

Den Vorteil der dynamischen Geometrie im Zusammenhang mit invarianten Eigenschaften sehen wir unter anderem darin, dass die Probanden auch Varianten von Vierecksformen erzeugten, die sie so kaum in einem Schulbuch antreffen würden. Somit zeigte sich, was Kimeswenger und Hohenwarter (2015, 174) über den Aufbau eigener innerer Bilder beschrieben haben. Die Tatsache, dass sich die Probanden an Vierecksformen mit extremen Proportionen gestört haben, zeigte uns, dass sie ein inneres, normiertes Bild der Vierecksformen haben. Durch das dynamische Setting wurden Möglichkeiten geschaffen, den Begriffsumfang zu erweitern und diese zum Teil vorhandenen starren Präkonzepte aufzubrechen und zu korrigieren.

15.1.4 Darstellung und gegenseitiges Erklären

Das Applet diente den Probanden nicht nur bei der Erkenntnisgewinnung. Es förderte ausserdem die Zusammenarbeit innerhalb des Tandems. Die Tandemsituation regte bei beiden Aufgaben und bei allen Tandems die Probanden dazu an, das Applet zur *Darstellung* und zur *gegenseitigen Erklärung* von entdeckten Sachverhalten zu nutzen. Das kooperative Lernen würde wahrscheinlich unabhängig vom Setting seinen Nutzen entfalten können und wäre nicht zwingend auf

die dynamische Komponente angewiesen. Die Videodaten zeigten uns aber auf, dass die Probanden, die während dem Bearbeitungsprozess gedanklich einen Schritt weiter waren als ihr Tandempartner oder bereits eine neue Entdeckung gemacht haben, das Applet dazu nutzen, den Tandempartner wieder auf den gleichen Wissenstand zu bringen. Interessant erscheint uns, dass sich die Probanden nicht nur diejenigen Erkenntnisse gegenseitig mit dem Applet erklärten, die funktionierten. Sie nutzen das Applet auch, um zu zeigen, dass etwas eben nicht dargestellt werden kann. Dass das *gegenseitige Erklären* in Verbindung mit dem Applet bei allen Tandems auftrat und dass bei allen Tandems der Austausch und die Zusammenarbeit sehr intensiv waren, sehen wir durchaus auch im Aufgabensetting begründet. Darum sehen wir durch den Einsatz von DGS im Geometrieunterricht einen Mehrwert bezüglich des Aufbaus der Argumentationskompetenz der Lernenden, wie dies bereits Holland (2007, 78) beschreibt. Durch das Applet bekommen diese Erklärungen und Aushandlungsepisoden eine ikonische Grundlage, welche die Lernenden motivieren und unterstützen kann.

15.2 Applet Gestaltung

Die Gestaltung der Applets ermöglichte eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben. Es zahlte sich aus, dass die Aufträge kurz und prägnant formuliert waren und auch die Applets auf die zentralen Angaben beschränkt waren (vgl. Hölzel u. Schelldorfer 2013, 10). Dadurch konnte der Zielverlust weitgehend verhindert werden. Diesen zu vermeiden ist gemäss Haug (2012, 64) eine der wichtigsten Voraussetzungen für einen erfolgreichen Einsatz von DGS.

16 GEMEINSAME BETRACHTUNGEN VON MODELL UND DYNAMISCHER GEOMETRIE

Wie wir bereits mehrfach feststellen konnten, sind durch das dynamische Setting keine zusätzlichen Phasen erforderlich. Sämtliche Tätigkeiten, die mit dem GeoGebra-Applet durchgeführt wurden, konnten den Phasen des deskriptiven Phasenmodells von Rott (2013) zugeordnet werden. Dies überrascht uns jedoch nicht - schliesslich wären sämtliche Tätigkeiten, die mit Hilfe des Applet durchgeführt werden, mit wesentlich grösserem Aufwand auch auf dem Papier möglich. Dennoch hat das dynamische Setting Einfluss auf das Phasenmodell. Durch die Dynamik ändern sich die Tätigkeiten, wie sie den einzelnen Phasen im Phasenmodell zuzuordnen sind. „Konstruktionen“, um ein Beispiel aus der Aufgabe 2 zu nennen, benötigen dank des Applets viel weniger Zeit und können auch durch ein systematisches Ausprobieren (*Exploration*) angefertigt werden. Dies hat Auswirkungen auf die Phase der *Planung / Ausführung*, die in einem Paper-Pencil-Setting vermutlich viel mehr Zeit in Anspruch genommen hätte.

Wie bereits erwähnt, ist der grosse Zeitanteil der Phase *Exploration* auffällig. In den verschiedenen Vorgehensweisen der beiden Aufgaben gibt es ausserdem in der Phase der *Exploration* die grösste Vielfalt an Tätigkeiten. Einen bedeutenden Grund dafür sehen wir in der dynamischen Geometrie. Einerseits dient das Applet als heuristisches Hilfsmittel: Es ist eine informative Figur. Durch die Einfachheit der Bedienung wird das entdeckende Variieren gefördert. Der Einsatz von gewissen heuristischen Strategien, die zur Phase *Exploration* gezählt werden, wird vereinfacht: Beispielsweise können die Probanden mit wenig Aufwand und in kurzer Zeit viele Einzel- und Spezialfälle betrachten. Doch das dynamische Setting bringt noch mehr: Wir sind überzeugt, dass die Arbeit mit dem Applet unter anderem wegen der schnellen und einfachen Bedienung, das Interesse und die Motivation gefördert hat. Die Probanden machten den Anschein, jeweils noch mehr über das Problem in Erfahrung bringen zu wollen, was sich unter anderem in Aussagen wie „Gibt es sonst noch etwas?“ oder „Schauen wir, ob es so auch stimmt“ zum Ausdruck kam. Die Probanden hatten durch die einfache Bedienung des Applets die Möglichkeit, noch weiter im Problemraum zu forschen, was jeweils der Phase der *Exploration* zugeordnet wird. Diese Haltung, etwas noch genauer untersuchen und beschreiben zu wollen, zeigte sich auch darin, dass einige Probanden nach einer Phase der *Verifikation*, in welcher sie die Lösung des Problems geprüft hatten, nochmals in eine weitere Phase der *Exploration* übergingen (als Beispiel Tandem 1 bei Aufgabe 1 und Tandem 1 und 5 bei Aufgabe 2).

Auch in der Phase der *Verifikation* hat sich das dynamische Setting in unseren Augen spürbar gemacht. Das Label *Darstellung / gegenseitige Erklärung*, das wir zwar auch in anderen Phasen des Modells codiert haben, wurde offenbar durch das dynamische Setting gefördert. Für die Probanden war es ein geringer Aufwand, zu einer bereits erstellten Figur zurückzukehren, weitere Beispiele oder aber auch eine stetige Veränderung des Applets zu erzeugen. Unsere Videoaufnahmen zeigen, dass die Phasen der *Verifikation* durch das dynamische Setting vereinfacht wurden und dass deswegen vermutlich auch vermehrt eine *Verifikation* stattgefunden hat.

17 METHODENREFLEXION

In Bezug auf die Analyse von Problembearbeitungsprozessen anhand eines deskriptiven Phasenmodells hatten wir mit der Studie von Rott (2013) eine ideale Vorlage für unsere eigene Forschungsmethode. Zusätzlich konnten wir von den Erfahrungen von Kittel (2007) hinsichtlich der Videografie und dem Umgang mit dynamischen Geometriesystemen profitieren. Dank dieser Vorlagen ist uns der Aufbau unserer explorativen Fallstudie im Grossen und Ganzen gelungen. Nachfolgend präsentieren wir unsere Reflexion über das Setting und die Auswertung der Daten.

Mit der Wahl der zwei Aufgaben sind wir äusserst zufrieden. Der unterschiedliche Problemcharakter und die unterschiedlichen Aufgabenformate stellten sich als gewinnbringend heraus. Dass wir die Probanden in den Aufgabenstellungen dazu aufgefordert hatten, ihre Erkenntnisse zu begründen, stellte sich als eine sehr gute Entscheidung heraus. Bei den Aufgabenformulierungen könnten wir trotzdem noch einiges herausholen. Bei der zweiten Aufgabe „Vierecke aus zwei Dreiecken“ kam nicht ganz eindeutig heraus, dass nach einer allgemeinen Begründung gefragt wird, welche Vierecksformen mit dem Applet erzeugt werden können und welche nicht. Wir würden ein nächstes Mal deutlicher auf die Ordnungskriterien hinweisen: „Welche Eigenschaften haben diejenigen Figuren, die gebildet werden können, gemeinsam? Erkläre, weshalb die einen Vierecksformen erzeugt werden können und die anderen nicht.“

Grundsätzlich sind wir auch mit dem Aufnahmesetting zufrieden. Die Aufnahmen aus den drei Perspektiven waren für unsere Auswertung sinnvoll, da sich die Aufnahmen tatsächlich äusserst gut ergänzt hatten. Die Bedeutung der Screenaufnahme ist offensichtlich. Dank der Webcam konnten wir die Mimik der Probanden beobachten. Dies war insofern wichtig, um zu erkennen, ob die Probanden auf das Applet oder auf die Dokumentation und das Theorieblatt schauten. Zusätzlich war es uns dadurch auch möglich, den Ton von vorne aufzunehmen. Die Kamera von hinten zeichnete Gesten, insbesondere auch das „Zeigen“ am Bildschirm, auf. Das Setting erwies sich ausserdem als sehr gut, da sich die Probanden offensichtlich nicht gestört fühlten. Aus den Aufnahmen wurde jedoch nicht immer ganz klar ersichtlich, welche Abschnitte der Dokumentation zu welchem Zeitpunkt verfasst wurden. Ausserdem war der Bildschirm nicht bei allen Tandems stets zu erkennen (die Probanden bewegten sich teilweise auseinander). Bei einer nächsten Durchführung würden wir den Winkel der Kamera von hinten etwas verändern - die Kamera müsste deutlich höher installiert werden. Dadurch hätte man auch die Tätigkeiten der Probanden auf dem Tisch (Erklärungen, Notationen) besser erkennen können. Eine grosse Schwierigkeit stellte die Aufnahme von Screen und Webcam über den Quicktime-Player dar. Insbesondere die Screenaufnahme wies teilweise beträchtliche Störungen auf, sodass teilweise zusammengezählt bis über eine Minute der Bearbeitungen nicht aufgezeichnet wurden. Einerseits gingen so einige Informationen auf dem Bildschirm verloren, die wir nur teilweise über die Aufnahme der Kamera von hinten wiederherstellen konnten. Andererseits stellte dies eine grosse Schwierigkeit für die Synchronisation der drei Videos dar und verkomplizierte den Schnittprozess. Dabei bewährte sich aber das Schnittprogramm Adobe Premiere umso mehr.

Der Versuchsaufbau war für diese Untersuchung geeignet. Die Tandemsituation erwies sich als sehr gewinnbringend. Die Probanden tauschten sich viel aus und erklärten sich gegenseitig ihre Erkenntnisse. Die Tandemsituation diente uns nicht nur zur Versprachlichung von Gedanken-

gängen, sondern regte die Prozesse oftmals auch an. Durch den gegenseitigen Austausch entwickelten sich oftmals neue Ideen, die zur Lösung des Problems beitrugen. Auch die schriftliche Dokumentation mit strukturellen Vorgaben - der Wechsel zwischen dem dynamischen Setting und dem handschriftlichen Festhalten von Erkenntnissen - stellte sich als vorteilhaft heraus.

Die aufgezeichneten Besprechungen stellten in der Analyse der Problembearbeitungen keinen Mehrwert dar. Sie waren jedoch hilfreich für das Verständnis der Dokumentationen. Die ausgewerteten Tandems erarbeiteten jeweils klare Erklärungen und Formulierungen, jedoch war dies nicht bei allen Schülerinnen und Schülern zu erwarten.

Für die Auswertung der Prozesse war es sehr wichtig, dass wir die Solution Summaries verdeckt erstellt und die Phasen bereits grob eingeteilt hatten. Bei der Einteilung der Prozesse nach der deduktiven Kategorienbildung nach Schoenfeld (1985) und Rott (2013) zeigte sich der Austausch im Team als äusserst wertvoll. Die Kategorienbildung für die Analyse der dynamischen Tätigkeiten war induktiv - die Auswahl der Codes ist subjektiv und auf unsere Aufgaben bezogen. Diese sind nicht direkt auf andere Aufgabentypen zu übertragen.

Trotz einigen Schwierigkeiten und noch vorhandenem Verbesserungspotential konnten wir mit der vorliegenden Methode in unseren Untersuchungen einige interessante Entdeckungen bezüglich der Prozessverläufe und den dynamischen Tätigkeiten machen.

18 FAZIT UND AUSBLICK

In diesem Kapitel möchten wir ein Fazit für unser persönliches Lernen und Lehren ziehen und weitergehende Fragestellungen aufwerfen, die sich aus unserer explorativen Fallstudie ergaben.

18.1 Erkenntnisse für den eigenen Mathematikunterricht

Die Arbeit an der empirischen Fallstudie zeigte uns von neuem auf, dass es lohnenswert ist, den Unterricht möglichst vielfältig zu gestalten und dass Lernprozesse auch Zeit benötigen. Das Problemlösen stellt für uns einen wichtigen Eckpfeiler eines vielfältigen Mathematikunterrichts dar. Es war spannend zu beobachten, dass das Problemlösen die Neugierde und Eigenaktivität der Lernenden anregte und eng mit dem entdeckenden Lernen verknüpft ist. Dabei zeigt diese Arbeit beispielhaft auf, dass entdeckendes Lernen überhaupt nicht im Zusammenhang mit un gelenktem und unstrukturiertem Lernen in Verbindung stehen muss (Helmke 2014, 66). Bei uns bot zum Beispiel die vorgegebene Struktur der Dokumentation den Probanden eine Hilfestellung, an welcher sie sich orientieren konnten. Zudem lenkte die Aufgabenformulierung die Probanden in die gewünschte Richtung, ohne sie völlig einzuengen. Diese eigentlich kleinen aber wichtigen Strukturierungsmassnahmen legten die Grundlage für eine mögliche gewinnbringende Bearbeitung der Problemlöseaufgaben.

Verschiedene Formen von kooperativem Lernen gehören für uns selbstverständlich zu einem vielfältigen Unterricht. Dass die Partnerarbeit beim Problemlösen einen grossen Mehrwert erzeugen kann, zeigte uns die Studie eindrücklich auf. Dabei ist ersichtlich, dass die Partnerarbeit viel mehr beinhaltet, als nur das Erlernen von sozialen Kompetenzen. Die Aushandlungsprozesse zeugten davon, dass das Erarbeiten eines Begriffsumfangs im Diskurs sehr fruchtbar sein kann. In der Videostudie konnten wir beobachten, dass die Lernenden gar nicht erst dazu aufgefordert werden müssen, ihre Gedanken zu verbalisieren, wie dies in anderen Lernsettings oft der Fall ist.

Das Studieren von Problembearbeitungsprozessen entlang des deskriptiven Phasenmodells gab uns Anregungen für das Lehren des Problemlösens im Mathematikunterricht. Die qualitative Fallstudie behandelte zwar eine begrenzte Zahl an Problembearbeitungsprozessen, erlaubte uns dafür, die Einzelfälle genau zu studieren und nachzuvollziehen. Die Erkenntnis, dass die Problemlöseprozesse der Lernenden nicht einem normativen Modell folgen müssen, wird unser Lehren hinsichtlich des Problemlösens beeinflussen. So werden wir weniger auf ein Einüben von einem normierten Problemlöseprozess fokussieren, welcher einer eher starren Phasenabfolge folgt, sondern vielmehr auf einzelne Phasen eingehen. Dabei soll thematisiert werden, was eine solche Phase beinhaltet und wie die Lernenden diese fruchtbar gestalten können. Es ist uns bewusst, dass das Problemlösen auch ein kreativer Prozess ist und dass sich Rückschritte auf das Phasenmodell beziehen und keinen Rückschritt im Problembearbeitungsprozess darstellen. Die Problembearbeitungen der Tandems zeigten uns exemplarisch auf, dass die Lernenden versuchten, Vorwissen abzurufen und mit dessen Hilfe die Aufgaben zu bearbeiten. Auch wenn es oft nicht exakt messbar ist, leisten in solchen Lernarrangements die Lernenden eine enorme kognitive Arbeit. Das macht es in unseren Augen lohnenswert, immer wieder Zeit für das Problemlösen zu reservieren. Nach dieser Zeit der intensiven Auseinandersetzung mit der Thematik des

Problemlösens sollte es sich für uns jedoch vielmehr um ein *Investieren* als um ein Opfern von Zeit handeln. Wir nehmen uns beide vor, dem Problemlösen von Zeit zu Zeit ganz bewusst Raum zu geben und es in vielfältigen Unterrichtssituationen einzusetzen. Dabei wollen wir besonders auf Formulierungen in den Aufgabenstellungen achten, damit die angestrebten Ziele auch erreicht werden können. Auch die dynamische Geometrie hat bei uns einen höheren Stellenwert bekommen und den Charakter einer Spielerei verloren. Vor allem wenn die mediale Ausstattung gut ist, sollen Applets in Zukunft unseren Mathematikunterricht bereichern und zum Beispiel einen gewichtigen Beitrag zum Aufbau eines Begriffsumfangs beitragen.

Einziges Wermutstropfen wird sein, dass wir die Prozesse unserer Schülerinnen und Schüler nicht mehr so genau unter die Lupen nehmen können. Auch wenn dies mit einer Schulklasse in diesem Umfang nicht mehr möglich sein wird, wollen wir eine unserer zentralsten Erkenntnisse im Auge behalten: Nämlich, dass bei einer Problemlöseaufgabe nicht primär die exakte Lösung des Problems im Mittelpunkt steht, sondern vielmehr der Problembearbeitungsprozess als Ganzes.

18.2 Anknüpfungspunkte für nachfolgende Untersuchungen

Die qualitative Fallstudie stiess durch die kleine Anzahl von Probanden an Grenzen, wodurch aber mögliche weiterführende Fragenstellungen aufgeworfen wurden. Interessant wäre es der Frage nachzugehen, ob Problemlöseaufgaben, die durch ihre Formulierung bewusst eine bestimmte Phase fördern wollen, dies auch im deskriptiven Phasenmodell erkennen lassen. Somit könnte den Hinweisen nachgegangen werden, welche wir bei der Auswertung ausmachten.

Auch bezüglich der dynamischen Geometrie wäre es lohnenswert der Frage nachzugehen, wie die Begriffsbildung gefördert werden kann. Dazu würde sich eine Studie mit einer Kontrollgruppe anbieten, welche sich die gleichen Unterrichtsinhalte ohne die Hilfe von Applets erarbeitet.

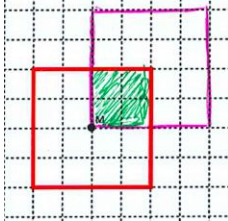
LITERATURVERZEICHNIS

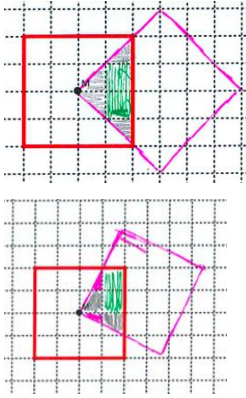
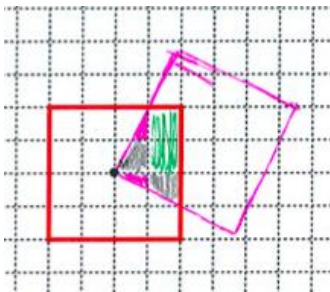
- Barzel, Bärbel, Stephan Hussmann und Timo Leuders, Hrsg. 2009. *Computer, Internet & Co. im Mathematik – Unterricht*. Berlin: Cornelson.
- Bruder, Regina. 2002. Lernen, geeignete Fragen zu stellen - Heuristik im Mathematikunterricht. In: *Mathematik lehren*, 115, 4-6.
- Bruder, Regina und Christina Collet. 2011. Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen.
- Deutscheschweizer Erziehungsdirektorenkonferenz (D-EDK), Hrsg. 2016. „Mathematik. Einleitende Kapitel.“ In: *Lehrplan 21*. Von der D-EDK-Plenarversammlung am 31.10.2014 freigegebene Vorlage, bereinigte Fassung vom 29.2.2016. Luzern: D-EDK-Geschäftsstelle. http://v-ef.lehrplan.ch/lehrplan_printout.php?e=1&fb_id=5
- Elschenbroich, Hans-Jürgen. 2009. „Mit dynamischer Geometrie argumentieren und beweisen.“ In: *Computer, Internet & Co. im Mathematik – Unterricht*, hrsg. v. Bärbel Barzel, Stephan Hussmann und Timo Leuders, 76-85. Berlin: Cornelson.
- Haug, Reinhold. 2012. Problemlösen lernen mit digitalen Medien. Förderung grundlegender Problemlösetechniken durch den Einsatz dynamischer Werkzeuge. Wiesbaden: Springer.
- Heinrich, Frank, Regina Bruder und Christina Bauer. 2015. „Problemlösen lernen.“ In: *Handbuch der Mathematikdidaktik*, hrsg. v. Regina Bruder, Barbara Schmidt-Thieme, Lisa Hefendehl-Hebeker und Hans-Georg Weigand, 279-302. Berlin: Springer.
- Helmke, Andreas. 2014. *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. 4. Auflage. Seelze-Velber: Kallmeyer in Verbindung mit Klett Friedrich.
- Herrle Matthias, Jochen Kade und Sigrid Nolda. 2013. „Erziehungswissenschaftliche Videographie.“ In: *Handbuch. Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*, hrsg. v. Barbara Friebertshäuser, Antje Langer und Annedore Prengel, 599-619. Weinheim und Basel: Beltz.
- Hole, Volker. 2009. „Den Satz des Pythagoras entdecken und erforschen.“ In: *Computer, Internet & Co. im Mathematik – Unterricht*, hrsg. v. Bärbel Barzel, Stephan Hussmann und Timo Leuders, 148–162. Berlin: Cornelson.
- Holland, Gerhard. 2007. Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren - Deduzieren.
- Hölzel, Reinhard und René Schelldorfer. 2013. „Im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I mit dynamischen Applets explorieren.“ In: *Praxis der Mathematik* 50 (4/2013): 9-16.
- Kimeswenger, Barbara und Markus Hohenwarter. 2015. „Interaktion von Darstellungsformen und GeoGebraBooks für Tablets“. In: *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade*

- als Wege zum Ziel*, hrsg. v. Jürgen Roth, Evelyn Süss-Stepancik und Heike Wiesner, 171-184. Wiesbaden: Springer.
- Kittel, Andreas. 2007. Dynamisch Geometrie-Systeme in der Hauptschule. Eine interpretative Untersuchung an Fallbeispielen und ausgewählten Aufgaben der Sekundarstufe. Hildesheim u. Berlin: Franzbecker.
- Langer, Antje. 2013. „Transkribieren – Grundlagen und Regeln.“ In: *Handbuch. Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*, hrsg. v. Barbara Friebertshäuser, Antje Langer und Annedore Prengel, 599-619. Weinheim und Basel: Beltz.
- Leuders, Timo. 2003. „Problemlösen.“ In: *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, hrsg. v. Timo Leuders, 119-135. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Ludwig, Matthias und Hans-Georg Weigand. 2014. „Konstruieren.“ In: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*, hrsg. v. Friedhelm Badberg, 55-80. 2. Auflage. Berlin: Springer.
- Mayring, Philipp. 2010. Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. 11., aktualisierte und überarbeitete Auflage. Weinheim: Beltz.
- Pólya, George. 1945. How to solve it. Princeton University Press. 4. Auflage der dt. Ausgabe „Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme“. 1995. Tübingen und Basel: Francke.
- Rott, Benjamin. 2013. Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- Rott, Benjamin. 2014. „Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern - Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells.“ *Journal für Mathematik-Didaktik* 35: 251-282. doi:10.1007/s13138-014-0069-2
- Weigand, Hans Georg und Thomas Weth. 2002. *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen*. Heidelberg u. Berlin: Spektrum.
- Weinert, Franz E. 2001. „Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – Eine umstrittene Selbstverständlichkeit.“ In: *Leistungsmessungen in Schulen*, hrsg. v. Franz E. Weinert, 17-31. Weinheim u. Basel: Beltz.
- Wittmann, Gerald. 2014. „Problemlösen.“ In: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*, hrsg. v. Friedhelm Badberg 81-98. 2. Auflage. Berlin: Springer.
- Woolfolk, Anita. 2008. Pädagogische Psychologie. 10. Auflage. München: Pearson.

ANHANG A

Aufgabe 1, Tandem 1

Solution Summary			
Zeit	Aktivität	Bemerkungen / Zusammenfassung	Phasen
00:00 - 00:24	P. lesen Aufgabenstellung und betrachten das Applet, ohne daran zu drehen. Die zwei Quadrate zeigen den Spezialfall „Quadrat“.	Aufgabenblatt durchlesen und Applet betrachten	Lesen
00:25 - 00:44	J: „Es ist ein Viertel vom Ganzen.“ J: „Das kann man so bewegen...“ → Dreht an Ecke F von beweglichem Quadrat, bis Spezialfall „Dreieck“ erreicht ist.	Spontane Äusserung zur Lösung <i>Die Applet war von Beginn an auf den Spezialfall „Quadrat“ gestellt.</i> Verwendung Applet verstehen Durchdringen der Aufgabe	Analyse
00:44 - 01:11	J: „Schau, so ist es auch ein Viertel. Es ist immer ein Viertel!“ M: stimmt zu. J. dreht das Quadrat so, dass die grüne Fläche ein beliebiges Viereck ist. M: „So sollte es auch gehen, ist halt etwas krüppelig.“	Einzelfälle betrachten	Erkunden
01:12 - 01:41	M: „Gibt es Grössenangaben?“ Beide schauen sich nochmals die Aufgabenstellung an. M: „Muss man das dann mit Variablen machen, oder...?“ J: „Begründen wir es halt mal.“	<i>M. meint offenbar, er müsse Flächeninhalte berechnen.</i> Aufgabenstellung durchdringen	Analyse
01:41 - 02:57	J. Skizziert Spezialfall „Quadrat“. J: „Man muss einfach eine Begründung machen. Entdeckung...“ → J. verweist auf Aufgabentext. J. schreibt auf: <i>„Die beiden Bierdeckel überschneiden sich immer um $\frac{1}{4}$ ihrer Gesamtfläche.“</i>		Schreiben

02:57 - 04:00	J. „Jetzt noch begründen.“ J. dreht das Quadrat langsam um das andere. M: „Nimm es mal diagonal (Spezialfall „Dreieck“). Dann hast du hier zwei ganze und 1, 2, 3, 4 halbe (Quadrate). Das sind dann nochmals zwei Ganze. So sind es auch vier.“ J. „Ja eben. Und wenn du es hier so krüppelig machst (siehe untere Skizze). Zeichnen wir das auch auf.“	 Spezialfälle / Einzelfälle betrachten: Heuristiken, da bewusstes Aufsuchen von Spezialfällen	Erkunden
04:00 - 06:49	→ J. fertigt Skizze an und schreibt auf. M. schaut sich das Applet an. M: „Ja ja.“ M: „Mach dann noch eines so (Spezialfall „Dreieck“)	Spezialfälle skizzieren und Erklärungen notieren	Schreiben
06:50	SuS tauschen Arbeiten. M. zeichnet und schreibt weiter, J. bearbeitet die Applet (dreht Quadrat.) J. schaut sich nochmals den Fall aus der Skizze (oben) an.	<i>J. und M. haben hier unterschiedliche Tätigkeiten. J. betrachtet schon wieder die Applet und sucht weiter nach einer Erklärung.</i>	Schreiben // PLA/AUS
07:24 - 09:07	M. hat fertig aufgeschrieben und schaut auf. „Die Mitte kannst du ja nicht verändern.“ J. zeichnet den Fall (Skizze oben) ein und beschreibt. „Das ist jetzt etwas komisch.“ J: „Zwei Ganze (grün)... Plus $\frac{3}{4}$ plus $\frac{3}{4}$ (grau)... $\frac{1}{4}$ plus $\frac{1}{4}$...“ M. bestätigt J. M: „Ou das ist aber $\frac{1}{3}$...“ J: „Nein schau, es ist $\frac{1}{4}$.“ M: „Ach ja stimmt.“	 Anfertigen der obigen Skizze Überprüfung / Berechnung der grünen Fläche über Zählen der Quadrate	Ausführung ohne Planung
07:30 - 09:23	J. die Teillösung (Berechnung der grünen Fläche bei obigem Fall) auf.	Notation der neuen Erkenntnisse	überlappt mit anderer
09:24 - 10:10	M. „Also die Tatsache ist ja klar, oder?“ M. dreht das Quadrat auf Spezialfall „Quadrat“. Die P. versuchen, eine Begründung zu finden.	<i>Die SuS stehen mit der Begründung an. Es ist ihnen nicht klar, wie sie die Sachlage genau begründen können.</i>	Erkunden

10:10	Die VL kommt ins Zimmer und fragt, ob die P. fertig sind oder ob sie noch etwas Zeit brauchen. Sie kündigt an, in zwei Minuten wieder zu kommen.		andere
10:27 - 10:45	J. dreht das Quadrat langsam um das andere.	Beobachten des Applet bei Umdrehung des Quadrates	Analyse
10:45 - 11:33	M: „Wart eh... Wenn das so liegt, ist das vier lang (Spezialfall „Dreieck“). Wenn es anders ist (Spezialfall „Quadrat“), sind es vier um die Ecke. Könnte das damit zu tun haben?“ J.: „Aber so (Spezialfall „Dreieck“) ist es kürzer - ich meine länger - als so (Spezialfall „Quadrat“).“ M: „Eben nicht.“	<i>M. weist darauf hin, dass beim stehenden Quadrat (rote Linie) stets $\frac{1}{4}$ (4 Häuschen) des Umfangs vom anderen Quadrat überdeckt wird.</i> <i>J. versteht M.'s Ansatz nicht; meint, M. begründe über den Umfang. J. korrigiert M: (Teil des Umfangs von beweglichem Quadrat, der vom anderen überdeckt wird, ist nicht immer gleich!)</i> Berechnen (Abzählen) des Umfangs der grünen Fläche	Verifikation
11:33 - 12:40	J. „So hast du 8. Und So (Spezialfall „Dreieck“) hast du...“ M: „Ja auch 8.“ Zählt durch. J. beginnt aufzuschreiben. „Warte schnell. Hm...“ SuS betrachten Spezialfall „Quadrat“. J. „So hast du 8. Und So (Spezialfall „Dreieck“) hast du...“ M: „Ja auch 8.“ Zählt durch. J. beginnt aufzuschreiben. „Warte schnell. Hm...“	<i>SuS machen Denkfehler - versuchen über Umfang zu begründen.</i>	Erkunden
12:40	Fertig.		

Besprechung:

M. erklärt Flächeninhalt der Spezialfälle „Quadrat“ und „Dreieck“. Er beschreibt, dass dieser in beiden Fällen 4 Häuschen beträgt (also $\frac{1}{4}$ ihrer Gesamtfläche).

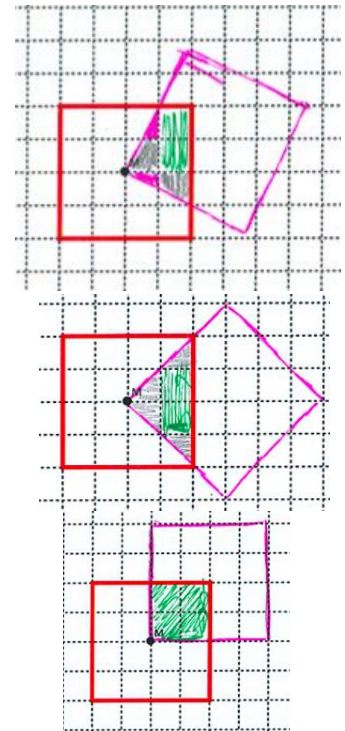
J. erklärt dritten Spezialfall („krüppelig“); auch hier beträgt der Flächeninhalt 4 Häuschen.

VL fragt nach allgemeiner Begründung.

J. erklärt, dass sich immer $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche überdeckt.

Bemerkungen zur Auswertung der Aufgabe:

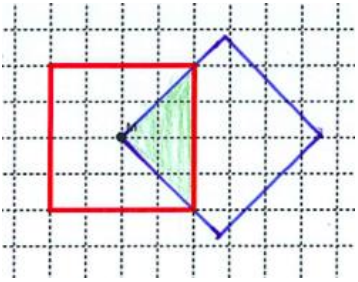
1. Die P. betrachten bloss drei verschiedene „Spezialfälle“. Sie erkennen, dass diese drei Spezialfälle immer wieder vorkommen, wenn man das Quadrat einmal um das andere dreht. Der Spezialfall 3 ist für sie „allgemein“ für alle Situationen zwischen Spezialfall „Quadrat“ und Spezialfall „Dreieck“.
2. Die P. erkennen sofort, dass die grüne Fläche ein Viertel einer Quadratfläche ist.
3. Es wird keine allgemeine Erklärung / Begründung notiert. Die Erklärung erfolgte über die Spezialfälle. Es wurden „dazwischen“ auch keine anderen Fälle betrachtet.
4. M. weist darauf hin, dass beim stehenden Quadrat (rote Linie) stets $\frac{1}{4}$ (4 Häuschen) des Umfangs vom anderen Quadrat überdeckt wird. M. ist hier sehr nahe an einem korrekten Ansatz. J. versteht M. jedoch falsch. Schliesslich beginnen sie, über dem Umfang der überdeckten Fläche zu argumentieren.
5. Auf den erstem Blick scheint es, als ob Proband J. Proband M. stets einen Schritt voraus wäre. Die entscheidende Idee kommt jedoch von Proband M.
6. Die drei Fälle haben die P. mit einem dynamischen Vorgehen gefunden (sie sind nicht bewusst und direkt auf die Fälle zugesteuert). Für die Begründung des Sachverhalts ist die dynamische Komponente der Aufgabe nicht zum Zug gekommen.



Aufgabe 1, Tandem 4

Solution Summary			
Zeit	Aktivität	Bemerkungen / Zusammenfassung	Phasen
00:00 - 01:06	Die P. lesen die Aufgabenstellung durch. Fragen nach, was mit Bierdeckel gemeint ist. Die klären den Begriff.	Aufgabenstellung lesen Frage über Bierdeckel → bezieht sich auf Aufgabenstellung / Wort	Lesen
01:06 - 01:31	V: „Also so...?“ Bewegt das Quadrat. D: „Es ist immer $\frac{1}{4}$.“ V: „Ach ja voll.“	spontane Äusserung zur Lösungsangabe, <i>ohne</i> dass zuvor ein Spezialfall betrachtet wird	Analyse
01:31 - 01:57	V. dreht das Quadrat um das andere, macht bei Spezialfällen „Dreieck“ und „Quadrat“ halt. D: „Siehst du? Immer $\frac{1}{4}$.“ V. dreht das Quadrat einmal um das andere und verharnt jeweils kurz bei den Spezialfällen „Quadrat“ und „Dreieck“.“ V: „Und was bringt das jetzt?“	Spezialfälle betrachten → Spezialfall „Quadrat“	Erkunden
01:58 - 02:56	Die P. Schreiben ihre Entdeckung auf. V. Schreibt, beide formulieren. „ <i>Das grüne Feld ist immer $\frac{1}{4}$ der Karte.</i> “	Formulierung der Erkenntnisse	Schreiben
02:43 - 03:26	D. dreht weiter an dem Applet (immer schneller) D: „Was man auch noch schreiben kann... Es gibt immer einen Kreis, wenn du es rundherum bewegst. Also alle Eckpunkte, wenn du es drehst, ergeben immer einen Kreis.“ V: „Ach ja. ... Es ist also immer 2 Häuschen Abstand...“ D: „Nein 4. 4 vom Mittelpunkt entfernt.“	Erklärung der neuen Erkenntnis an das Tandem	Erkundung

03:26 - 07:34	Die P. formulieren einen weiteren Satz. V: „Der Radius ist immer 4. Aber Moment, das stimmt ja nicht immer.“ <i>Dreht das Quadrat auf Spezialfall „Dreieck“.</i> „So ist es nicht 4.“ D: „Doch schau, die Länge ändert nicht.“ Die P. sind sich nicht ganz sicher, ob Radius der korrekte Begriff ist. Sie einigen sich darauf, dass sie von der Linie MF sprechen. V. notiert „Linie MF = 4 Häuschen“. D. misst die Länge eines Häuschens. V: „Okay - und jetzt müssen wir die anderen auch noch...?“ D: „Alle Eckpunkte (des Quadrates) bewegen sich auf einem Kreis um M.“ V. möchte mit der Notation beginnen. D. formuliert, V. notiert. „Die Eckpunkte des beweglichen Bierdeckels bewegen sich kreisförmig um den Mittelpunkt M.“ V: „Und wofür brauchen wir das da unten (<i>deutet auf übriges Aufgabenpapier hin</i>)? Ach warte.“ Die P. schauen sich die Aufgabenstellung nochmals an. D: „Machen wir noch eine Skizze, dann sieht es nicht so leer aus.“ D. macht noch eine Skizze (Spezialfall „Quadrat“).	Erklärung <i>D. will den Flächeninhalt vermutlich berechnen. Er vermutet, dass die Länge eines Häuschens 1cm beträgt. Er misst nach und merkt, dass das nicht so ist. Sie einigen sich darauf, mit der Einheit Häuschen weiterzufahren.</i>	Schreiben mit paralleler Erkundung (03:46 - 04:05)
------------------	--	---	---

07:35 - 08:54	V: „Aber schau, da steht eigentlich nur, dass wir über die grüne Fläche sprechen müssen... Wir haben jetzt auch über so andere Sachen gesprochen... Was könnte man noch sagen?“ V: „Ach schau - wir könnten über die Form sprechen.“ <i>Dreht Quadrat zum Spezialfall „Dreieck“.</i> V: „Z.B. wenn - wie sagt man das - so in den Ecken, also in den Diagonalen liegt, dann gibt es ein gleichschenkliges Dreieck. Und auch rechtwinklig. Hier (Spezialfall „Quadrat“) ist es ein Viereck - ein Quadrat sogar. Aber das (Figur dazwischen; kein Spezialfall) ist nichts. Dazwischen sind es einfach jegliche Vierecke.“ V: „Es ist nur auf der Seite ein Dreieck, und sonst sind es Vierecke.“ D: „Schreib du... Das ist auch eine Entdeckung.“	Die P. bemerken, dass sie sich vor allem auf die Fläche des Innenteils beziehen sollen. weite Suche im Problemfeld (beziehen sich nicht auf die Grösse der Fläche; sie beschreiben die Form). → Folge der dynamischen Geometrie → Verstehensleistung wird offenbar deutlich erhöht	Erkunden
08:54 - 10:20	V. fragt nach, wie sie das formulieren muss. <i>„Die grüne Fläche kann ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck, ein Quadrat oder ein unbestimmtes Viereck sein.“</i>	Festhalten von Erkenntnissen	Schreiben
10:20 - 10:30	<i>Unterbruch: Die VL kommt ins Zimmer und fragt, ob noch Zeit benötigt würde. Die Probanden bejahen.</i>	Störung	
10:30 - 11:44	Schreiben Erklärung zu Ende		Schreiben
11:45 - 12:10	V: „Und jetzt?“ D: „Fertig. Rufen wir.“ V: „Hä - und das war die Aufgabe?“ D: „Es gibt noch eine weitere Aufgabe.“ V: „Warum haben wir so viel Platz? Komm ich mache noch eine Skizze.“	<i>Hier wird nicht mehr inhaltlich gearbeitet. Die SuS denken, die Aufgabe vollständig bearbeitet zu haben, sind sich aber nicht ganz sicher.</i>	Transition
12:10 bis Ende	D. Skizziert zusätzlich den Spezialfall „Dreieck“ und färben die überdeckte Fläche grün.		Schreiben

Besprechung:

V. erklärt, dass die grüne Fläche immer $\frac{1}{4}$ (des Ganzen) ist.

V. sagt, dass MF immer gleich gross ist. D. ergänzt, dass sich die Eckpunkte stets auf Kreisen um M bewegen.

D. erklärt, dass die grüne Fläche immer eine Vierecksform ist, ausser bei Spezialfall „Dreieck“.

VL. fragt nach, wie das mit der grünen Fläche ist.

D. sagt nochmals, dass der Flächeninhalt immer $\frac{1}{4}$ des liegenden Quadrates ist.

VL. fragt nach, warum das so ist; wie sie auf diese Erkenntnis gekommen sind.

V. erklärt diese Erkenntnis über die Spezialfälle (es passen jeweils vier ins liegende Quadrat).

VL. fragt, warum diese gleich sind.

V. sagt, sie seien halt $\frac{1}{4}$.

VL: „Wie konntet ihr die Fläche des „unbestimmten“ Vierecks bestimmen?“

D: „Wenn ein Häuschen angeschnitten wird, kann man immer einen zweiten Teil dazu finden.“

→ Diese Erklärung wurde erst zu diesem Zeitpunkt genannt worden. Vermutlich entstand die Idee durch die Nachfrage der VL.

VL: „Konntet ihr dass bei allen Fällen rundherum zeigen?“

V. und D. bejahen.

Bemerkungen zur Auswertung der Aufgabe:

1. Die P. äussern sich sehr schnell und vor der Betrachtung von Spezialfällen / vor einer Manipulation spontan zur Lösung.
2. Die P. betrachten zwei Spezialfälle („Quadrat“ und „Dreieck“) und begründen über diese, dass der Flächeninhalt stets $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche ist.
3. Die P. äussern sich zusätzlich noch zur Form der grünen Fläche. Einzig hier betrachten sie Fälle zwischen den Spezialfällen.
4. Erst in der Auswertung / Besprechung wurde erstmals über die Grösse des Flächeninhalts bei Fällen zwischen den Spezialfällen gesprochen. Durch Nachfragen der VL wurde dieser Gedanke initiiert.
5. Das dynamische Drehen des Quadrats ermöglicht es den SuS, eine allgemeine Aussage über die Form der grünen Fläche zu machen.

Aufgabe 1, Tandem 5

Solution Summary			
Zeit	Aktivität	Bemerkungen / Zusammenfassung	Phasen
00:00 - 00:33	N: „Kannst du das mal verschieben?“ M. dreht das Quadrat zum Spezialfall „Quadrat“. N: „Also theoretisch sollte das (die grüne Fläche) immer gleich gross sein, egal wie du es verschiebst.“ M. dreht das Quadrat, hält bei Spezialfällen („Dreieck“) an. N: „Ja, es ist immer gleich gross. Soll ich schreiben? Willst du?“	sofortiger Beginn, ohne erneutes Durchlesen der Aufgabenstellung spontane Äusserung zur Lösung	Analyse → SPO
00:33 - 01:23	M. schreibt, N. hilft formulieren. „Das grüne Feld ist immer gleich gross.“ N.: „Und jetzt ist die Frage, wieso!“ M. sucht Stifte und notiert den Satz, N. betrachtet das Applet.	Formulieren der Erkenntnisse	Schreiben
01:23 - 01:35	N: „Und warum ist das jetzt so?“ M: „Ja vielleicht weil der Punkt M. immer am gleichen Ort ist.“ N: „Ja, wenn es (das feste Quadrat) ein Kreis wäre, wäre es ja logisch. Aber so...“	<i>N. sieht vermutlich vor dem inneren Auge, dass dann (wenn das stehende Quadrat ein Kreis wäre) immer ein Kreissektor mit dem Winkel von 90° überdeckt wäre.</i>	Exploration
01:35 - 01:58	M. dreht das Quadrat um das andere. N: „Ja, weil auf der einen Seite gehen solche Feldchen weg und auf der anderen kommen genauso viele hinzu.“ M. Dreht weiter an den Quadraten. „Ja.“ N: „Auch hier über die Ecke. Das heisst, was auf der einen Seite abnimmt, kommt auf der anderen hinzu (zur grünen Fläche). Wie wollen wir das schreiben?“	<i>Die P. gehen sehr schnell vor.</i> <i>Die P. nutzen die mediale Unterstützung gut.</i> → zielgerichtet (Kein „Entdecken“), klare und korrekte Begründung, noch keine Überprüfung²⁴	Ausführung

²⁴ Aufgabenstellung „begründen“ → Macht das einen Unterschied? Auswirkung auf die Bestimmung der Phasen...

02:07 - 05:47	N: „Wenn man das eine Quadrat bewegt...“ M: „Soll ich da mal eine Skizze machen?“ N: „Zeichne doch in die Ecken jeweils ein Quadrat (Spezialfall „Quadrat“).“ M: „Wie gross ist es?“ N. „Ja auch 4.“ N. erklärt, wie M. die Skizze anfertigen muss. („Einmal schräg und einmal komplett.“) M: „Das ist aber noch schwer zu zeichnen.“		Besprechung über Formulierung der Erkenntnisse Dokumentation der Erkenntnisse <i>Die P. haben die Absicht, eine allgemeine Erklärung festzuhalten. Die Erkenntnis ist korrekt. Jedoch haben die P. beim Skizzieren einen Fehler gemacht. Das Quadrat wurde auf der Skizze nicht gedreht, sondern „geklappt“.</i> Die P. arbeiten inhaltlich nicht weiter, jedoch beschäftigen sie sich vertieft mit ihrer „Lösung“.	Schreiben
05:48 - 07:05	N: „So, was könnte man noch herausfinden?“ M. dreht am Quadrat. N: „Wenn man den Punkt M bewegt....“ M. versucht, Punkt M zu bewegen. N: „Den kann man ja nicht bewegen.“ N: „Dann schreiben wir das so; wenn sich der Punkt M nicht bewegt, verändert sich die grüne Fläche nicht.“ Die P. finden, der Satz passe nicht wirklich in die Aufgabe...		<i>Die P. kommen noch einmal darauf zurück, dass der Punkt M. in der Mitte sein muss, dass die Fläche immer gleich bleibt. Sie greifen nochmals auf anfänglich gemachte Aussage zurück.</i>	Verifikation
	N: „Dann war's das, oder?“ N: „Moment, wir könnten noch schreiben... Wenn der Punkt nicht in der Mitte wäre, wäre es anders.“ M. stimmt ihm zu. M: „Soll ich das da schreiben?“ N. hilft bei der Formulierung. <i>„Wenn der Punkt M nicht in der Mitte wäre, wäre die grüne Fläche beim drehen unterschiedlich gross.“</i>		gehört noch zur obigen Episode	Schreiben

07:58 - 09:00	N: „Man könnte noch... Kommt es darauf an, ob die beiden Quadrate gleich gross sind? Ja voll, das ist egal.“ N: „Und wenn es ein Rhombus wäre - ich glaube, das wäre gleich.“ N: „Nein. Wobei doch...“ N: „Hm... Keine Ahnung - das müssen wir aber auch nicht haben...“	Problemstellung abändern / erweitern: „Wäre es dann auch so?“	Verifikation
09:00	Die P. befinden, dass sie die Aufgabe fertig bearbeitet haben und holen die VL ins Zimmer.		

Besprechung:

M., erklärt, dass die grüne Fläche immer gleich gross ist, wenn man F bewegt.

M. erklärt, weshalb das so ist: „Auf der einen Seite kommt so viel hinzu wie auf der anderen Seite weg geht.“

VL fragt nach, ob das immer (in allen Fällen) so ist. M. bejaht.

M. erklärt, dass sie herausgefunden haben, dass wenn Punkt M. nicht in der Mitte wäre, die Aufgabe nicht funktionieren würde.

Bemerkung zur Auswertung der Aufgabe:

1. Die dynamische Komponente der Aufgabe ist bei diesem Tandem zentral. Sie betrachten keine „Fälle“ sondern begründen allgemein und äussern sich „dynamisch“ („Die grüne Fläche bleibt immer gleich, wenn man F bewegt.“).
2. Die P. haben einen allgemeinen, korrekten Ansatz und äussern sich sehr präzise. Sie gehen nicht speziell auf die Spezialfälle ein - sie wollen direkt allgemein begründen.
3. Die Erklärung (inkl. „zeigen“) ist korrekt, die Skizze ist jedoch misslungen (N. erklärt, was M. zeichnen soll → Missverständnis).

Aufgabe 2, Tandem 1

Solution Summary			
Zeit	Aktivität	Bemerkungen / Zusammenfassung	Phasen
00:00 - 00:27	J: „Die einen sind einfach. Z.B. das Quadrat.“ J. versucht ein Quadrat zu machen. Er bringt das Dreieck zuerst an die Spiegelachse, verschiebt die Ecke dann von Auge so, dass ein Quadrat entsteht.	<i>Sie verbalisieren nicht, was sie machen möchten. Aber der Plan scheint zu sein, dass sie anhand des Theorieblattes die Figuren abarbeiten. Somit beginnen sie mit dem Quadrat, welches ihnen auf Anhieb gelingt.</i>	nach kurzen Phase der Analyse (spontana-
00:27 - 02:00	J. skizziert das Quadrat. M. liest die nächste Figur - Rhombus - und stellt diesen im Applet dar.	M: Planung / Ausführung (00:44 - 00:55) zielstrebig, direkt zum Rhombus	Schreiben // PLA / AUS
02:00 - 02:30	J. „Mach mal den nächsten.“ M. „Den hab’ ich schon. Rhombus.“ J. „Warte mal schnell.“ Zieht an der Figur. „So ist es schöner.“ M: „Ah es muss gleich lang sein, diese Seiten.“ J: „Ja eben - so!“ M: „Ich bin schon ein Hobbyclown.“ M: „Sind so alle gleich lang?“ J: „Ja es ist ja ein gleichseitiges Dreieck.“	<i>J. korrigiert M.’s Rhombus. Er erstellt einen korrekten Rhombus - jedoch wäre schon der erste von M. korrekt gewesen.</i> <i>Die P. begründen die gleiche Länge aber nicht mit Symmetrie, sie zählen die Seitenlängen ab.</i>	Planung / Ausführung
02:30 - 03:26	J. fertigt die Skizze an und schreibt die Erklärung auf. J. „Er kann aus allen rechtwinkligen Dreiecksformen bestehen. - Ähm, aus allen gleichschenkligen.“ J. verschiebt Eckpunkte, stellt verschiedene Rhomben dar.	Anfertigen der Skizze und Formulierung der Erklärung <i>J. nennt auf der Dokumentation die Spiegelachse explizit.</i>	
03:26 - 03:36	M: „Das geht nicht“ J: „Doch.“ M: „Nein.“ J. „Doch.“ M: „Warum?“ J. „Schau es dir doch mal an!“	<i>M. zeigt im Theorieblatt auf das Rechteck und meint, man könne es nicht darstellen.</i>	Analyse

03:36 - 04:32	M. verschiebt die Eckpunkte des Dreiecks und versucht, ein Rechteck zu bilden. J. ist noch immer an der Dokumentation des Rhombus.	kein zielgerichtetes Vorgehen, ein „Ausprobieren“ (Versuch, ein Rechteck zu erstellen) <i>J. ignoriert die Aufgabenstellung (aus Dreieck und Spiegelbild <u>ein</u> Viereck bilden).</i>	Erkunden // Schreiben
	J. ist mit dem Schreiben fertig und übernimmt das Verschieben am Computer. J: „Ah so funktioniert's mit dem Verschieben.“ J. versucht ein Rechteck zu erzeugen - scheitert jedoch. M: „Es geht nicht!“ J: „Wenn man zwei Spiegelachsen hätte, ginge es.“ M: „Ja.“	→ nutzen die dynamische Geometrie für die Lösungsfindung.	Erkunden (zur obigen Phase)
04:32 - 05:08	M: „Aber das Drachendings (Drachenviereck) geht!“ M. stellt ein Drachenviereck dar. J. „Nimm den {die Ecke} noch ein Bisschen runter. Und den noch etwas raus.“ J. übernimmt die Kontrolle am Computer. M: „Da ist der Drachen schön.“	<i>Die P. haben das Bedürfnis, einen „schönen“ Drachen darzustellen.</i> <i>Die P. haben das Drachenviereck schon gesehen, stellen es nun aber nochmals dar.</i>	Ausführung
05:08 06:44	J. skizziert das Drachenviereck und schreibt die Erkenntnisse auf. M. sitzt da, schaut zu und / oder betrachtet das Applet. M: „Das brauchst du ja nicht mehr da, oder?“ J: „Nein.“ M. bewegt das Applet. J: „Ach doch.“ M. macht wieder den Drachen J: „Hier, übernimm du (das Schreiben)!“		Schreiben
06:50 - 07:13	J. übernimmt wieder am Computer und beginnt, die Ecken des Dreiecks zu verschieben. J. „Ich hätte gerne eine gerade Anzahl. So.“ J: „Es kann aus allen Dreiecken bestehen. Solange sie nicht gleichschenkelig oder gleichseitig sind.“ M. dokumentiert.	Präzisierung der Eigenschaften des Dreiecks, damit ein Drachen erzeugt werden kann	Verifikation // Schreiben

07:13 - 08:16	M. fragt nach, wie er den Drachen zeichnen muss. <i>„Es kann aus allen Dreiecken bestehen, sofern sie nicht gleichseitig oder gleichschenkelig sind.“</i> J: „Siehst du, man kann den auch drehen“ (<i>J. meint damit, dass der Diagonalenschnittpunkt dann auf der anderen Seite der Hauptdiagonale liegt.</i>)		Schreiben
08:19 - 09:39	M. übernimmt wieder den Computer. Er <i>spielt</i> mit dem Applet. Er zieht zwei Ecken des Dreiecks auf die andere Seite der Spiegelachse. J: „Hmmm... M.“ J. übernimmt wieder den Computer. M: „Ach - das Rechteck!“ J. versucht aus der Figur ein Rechteck zu machen. M. lacht. J: „Häää? Das ist jetzt total verwirrend!“	Probieren ohne genauen Plan <i>Sie ziehen das erst mal einen Punkt über die Spiegelachse und denken, dadurch das Rechteck bilden zu können.</i>	Erkunden
09:40 - 10:20	M: „Hmm... das Parallelenviereck?“ J. zieht an den Ecken. M: „Hör auf! Das sieht komisch aus...“ M: „Jetzt hast du ein Quadrat auf der anderen Seite.“ J: „Das Parallelenviereck - das geht ja gar nicht. Moment...“	Die P. entfernen sich von Problem. → Weite Suche im Problemfeld.	Erkunden

10:20 - 11:20	M: „Jaja - ich habe eine Regel gefunden! Im Viereck muss es eine Spiegelachse haben und auf beiden Seiten muss es gleich aussehen.“ J: „Jaaaaa.... Aber sie dürfen nicht dreh-.... Wie sagt man dem?“ M: „Drehmittelpunkt? Meinst du das?“ J: „Jaaaaa.... Sie dürfen nicht... drehgespiegelt sein!“ M: „Ja. Das ist aber auch drehgespiegelt. Sie dürfen schon, aber...“ J: „Sie dürfen achsensymmetrisch sein...“ M: „Sie müssen!“ J: „Ja sie müssen achsensymmetrisch sein, aber... Sie müssen auf beiden Seiten gleich aussehen und achsensymmetrisch sein und nicht drehsymmetrisch.“ M: „Ja klar, wenn es auf beiden Seiten gleich aussieht, ist es achsensymmetrisch.“ J: „Ja aber so (zeigt auf Parallelenviereck auf Begleitmaterial) sieht es ja auch auf beiden Seiten gleich aus. Aber es ist halt drehsymmetrisch und nicht achsensymmetrisch.“ J: „Schreib das mal auf!“	<i>Sie erklären, dass die Symmetrieachse die Figur in zwei gleiche Teile teilen muss. Sie nennen aber nicht, dass diese zwei Dreiecke sein müssen (damit die Aufgabe geht).</i>	Verifikation
11:21 - 12:05	M. schreibt auf. J. arbeitet mit dem Applet. J: „Ich versuche mal das Trapez - die anderen gehen, glaube ich, nicht.“ J. verschiebt die Ecken unterschiedlich. „Moment.“	<i>Die P. erkennen, dass die Dreiecke gleich gross und „gleich“ sein müssen.</i>	Schreiben // Erkunden
12:05 - 12:46	J: „Das Trapez geht gar nicht. Weil es nicht...“ M: „Das ist eine Ausnahme.“ J: „Ja. Das Trapez besteht ja nicht aus Dreiecken.“ M: „Bist du dir sicher?“ J: „Ach doch doch. Es besteht schon aus Dreiecken, aber nicht aus solchen, die gleich gross sind. Du hast hier eines, hier eines, hier ist das andere. (Er zeichnet die Dreiecke in die Skizze des Begleitmaterials ein.) Aber sie sehen nicht gleich aus.“	Anwendung des Kriteriums → Überprüfung der „Regel“	Verifikation

12:46 - 13:35	M. notiert die neuen Erkenntnisse: „Es klappt bei allen Vierecken, die achsensymmetrisch sind und auf beiden Seiten gleich aussehen. Eine Ausnahme ist das Trapez...“ J. übernimmt das Dokumentationsblatt und formuliert selber. M: „Okay - keine Geduld!“ „...weil es nicht aus zwei gleichflächigen Dreiecken besteht.“	<i>Die Lösung stimmt im Ansatz, die Begründung ist aber nicht ganz ausreichen und ungenau formuliert.</i>	Schreiben
13:35 - 14:30	J: „Ich probiere das jetzt doch noch mal. Es kann nicht sein, dass das nicht geht...“ M: „Was?“ J: „Es ist eine Achsenspiegelung...“ J. versucht erneut ein Rechteck zu erstellen. M: „Ja dann haben wir es...“	Wildes Ausprobieren ohne genauen Plan	Erkunden
14:30 - 15:58	J. notiert den letzten Satz. „Das Rechteck wäre mit 2 Symmetrieachsen möglich.“ J. zeigt M. wie man mit zwei Spiegelachsen ein Rechteck machen könnte. M: „Ich kapiere es nicht!“	<i>J. würde zuerst ein Quadrat erzeugen und dieses dann nochmals spiegeln und so ein Rechteck bekommen.</i> Erweiterung / Abänderung der Aufgabenstellung	Schreiben
15:58	Die P. erachten die Aufgabe als gelöst. VL kommt ins Zimmer.		

Besprechung:

M. erklärt:

- Quadrat: Diagonalen sind die Spiegelachsen. Deshalb geht es.
- Rhombus: Beim Rhombus müsste es mit beiden (Spiegelachsen) gehen. → zeigt auf die Symmetrieachsen.
- Beim Drachen geht es nur so. Sonst wäre es nicht symmetrisch über die Achsen.
- Wir haben festgestellt, dass es bei allen Vierecken geht, die eine Symmetrieachse haben. Beim Trapez nicht.

J: ergänzt: „Wenn es drehsymmetrisch ist geht es nicht.“

VL. fragt nach, weshalb es beim Trapez nicht geht.

J: „Weil es nicht aus zwei gleichflächigen Dreiecken besteht.“

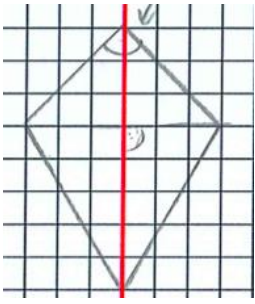
M: „Und es geht ja auch nicht immer.“ J: „Es geht nur (hat nur dann Symmetrieachsen), wenn es regelmässig ist.“ M: „Winkel alpha und beta müssten gleich gross sein, damit es achsensymmetrisch ist.“

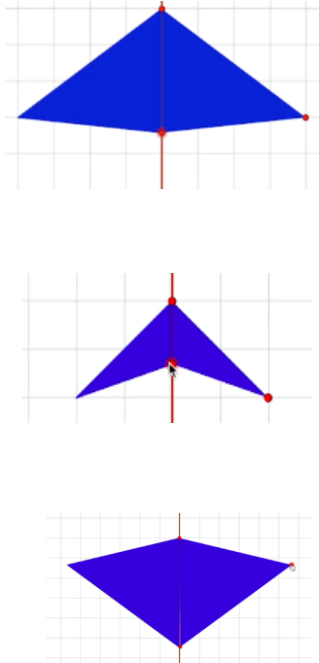
Bemerkungen zur Auswertung der Aufgabe:

1. Die P. stellen nacheinander verschiedene Vierecksformen dar. Das Rechteck ist das erste Viereck, das offenbar nicht geht. Bei diesem Fall beginnen sie langsam zu begründen (weshalb es nicht geht, wie es gehen würde).
2. Die Erkenntnisse vom Rechteck können sie (teilweise) auf das Trapez und das Parallelenvier-eck anwenden.
3. Am Schluss versuchen die P., eine allgemeingültige „Bedingung“ für die Bildung der Vierecks-formen zu finden.
4. Die P. nutzen die dynamische Komponente in verschiedenen Phasen (Erkunden: „Geht das?“, Verifikation: „Geht’s auch anders?“ / Plausibilitätskontrolle).
5. In der Besprechung formulieren sie die allgemeine Bedingung, welche Vierecksformen gebil-det werden können, präziser als während dem Problemlöseprozess. Jedoch nennen sie auch bei der Besprechung nicht, dass die Symmetrieachse die Vierecksform in zwei Dreiecke trennen muss.

Aufgabe 2, Tandem 4

Solution Summary			
Zeit	Aktivität	Bemerkungen / Zusammenfassung	Phasen
00:20 - 00:35	V „Also...“ D: „Das können wir nicht machen, das da auch nicht, das auch nicht.“ V: „Das Rechteck....“ D: „Nein geht nicht.“ V: „Es ginge, wenn es ein Viereck wäre.“ V. verschiebt die Eckpunkte des Dreiecks.	Aufstellen von Hypothesen, die es schliesslich zu beweisen gilt. V. erklärt, wie das Rechteck in einer abgeänderten Form der Aufgabe möglich wäre.	Analyse
00:35 - 00:51	D: „Mach' mal ein Quadrat.“ V. macht ein Quadrat V: „Schreibst du oder ich?“	<i>Die P. sind sich sicher, dass das Quadrat geht.</i>	Ausführung
01:19 - 03:13	V: „Soll ich es zeichnen? Müssen wir es zeichnen?“ D: „Ja. Machen wir es einfach.“ D: „Das Quadrat.... kann gebildet werden.“ <i>„Quadrat: Kann aus zwei rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken gebildet werden. Die Seiten sind parallel und gleichseitig.“</i> D: „Zeichnest du?“ V: „Ja.“ V. Zeichnet das Quadrat.		Schreiben
03:14 - 03:43	D: „Machen wir den Rhombus.“ V. macht ein Rhombus. D: „Ja..... Nein.... Ach so - ich habe das Drachenviereck gemeint.“ V. macht ein Drachenviereck. D: „Genau.“ V: „Der Rhombus.“ V. macht wieder einen Rhombus. „Der geht auch. Er ist wieder gleichschenklilig, aber nicht rechtwinklig.“ D: „Jaa... Der Rhombus.“	Begründung über Dreiecksform	Planung / Ausführung

03:44 - 06:13	V. zählt, wie viel Platz sie bei den Vorlagen haben. D: „Es gehen ja eh nicht alle.“ V. fertigt die Skizze an. D. notiert die Erklärung. „Rhombus: Kann ebenfalls aus zwei gleichschenkligen Dreiecken gebildet werden. Die Seiten sind Parallel und gleichseitig.“ D: „Heisst das gleichseitig, wenn die Seiten alle gleich sind...?“ V: „Ja, aber das ist ja logisch, wenn es ein Rhombus ist.“	Die P. sind sich offenbar nicht ganz sicher, was ihre Aufgabe ist (oder wie sie diese zu erfüllen haben).	Schreiben
06:14 - 06:30	D: „Und nun. Das Trapez geht nicht.“ V: „Machen wir doch zuerst die, die gehen. Rechteck geht auch nicht, Parallelenviereck auch nicht. Drachenviereck!“ D: „Ja das Drachenviereck.“ V: „Dann mach ich diese Ecke hier einfach eins hoch?“ D: „Ja.“		Planung / Ausführung
06:31 - 07:45	V. skizziert das Drachenviereck. V: „Das hier ist rechtwinklig...“ D: „Ja. E mal f. Das hier (obere Ecke des Dra- chens) ist auch rechtwinklig. Also es kann sein.“ V: „Da jetzt schon.“ D: „Nein.“ V: „Doch.“ D: „Oder schon? Ach ja. Da jetzt schon, aber es muss nicht.“ V: „Auf der Zeichnung ist es jetzt halt rechtwinklig.“ D. zieht den Drachen auseinander. V: „Ist das jetzt auch ein Drachenviereck?“ D: „Ja, das hier ist auch ein Drachen.“		Schreiben Erkunden
07:50 - 08:00	D. formuliert die Erklärung. V. hilft bei der Formulierung. „Drachenviereck. Die Dreiecke können gleichschenklilig, rechtwinklig, stumpf- oder spitzwinklig sein.“	Die P. zeichnen jeweils exakt die gleichen Figuren vom Bildschirm ab.	Schreiben
08:00 - 09:00	Die P. erzeugen ein stumpfwinkliges Drachen- viereck und verändern dieses.	Die P. nutzen die dynamische Geometrie, um sich Sachverhal- te zu erklären und zu zeigen.	Erkunden

09:00 - 10:30	D. und V. formulieren weiter und stellen die Dokumentation fertig.	Die P. schauen nicht die Dreiecke an, welche gespiegelt werden, sondern teilen das Dreieck durch die andere Diagonale.	Schreiben
10:30 - 12:00	V: „Ist das hier auch ein Drachenviereck?“ D: „Ja.“ V: „Aber dann würde es eher auf dem Kopf stehen. Oder? Normalerweise sind die so.“ D: „Keine Ahnung.“ V: „Ich mache jetzt ein Schönes.“ D: „Das Drachenviereck darf einfach nicht so sein.“ V: „Nein.“ D: „Moment, es darf gar nicht spitzwinklig sein....“ V: „Stumpfwinklig.“ D: „Nein spitzwinklig. Aber so ist es spitzwinklig.“		Erkunden
12:00 - 13:15	V: „Was, es gehen nur 3? 3 von diesen 6?“ D. beginnt zu notieren. V: „Gleichschenkelig dürfen die Dreiecke nicht sein. Dann wäre es kein Drachen mehr.“ D: „Gibt es noch etwas anderes?“ V: „Über e und f müssen wir noch etwas sagen...“ „Die Diagonalen e und f kreuzen sich rechtwinklig.“ V: „Ist das immer so?“ D: „Ja.“	<i>Die Aussagen stehen nicht im direkten Zusammenhang mit der Aufgabe.</i>	Schreiben
13:15	D: „Trapez....“ D. beginnt mit der Formulierung für diejenigen Vierecksformen, die nicht gehen.“ V: „Man müsste es umgekehrt haben. Dann könnte man das Parallelenviereck machen.“ D: „Ja aber dann spiegelt es ja nicht mehr.“ V: „Ja genau. Drehpunkt statt spiegeln.... Du kannst einen Drehpunkt machen, dann kannst du es umdrehen.... und dann hast du es. Theoretisch.“	<i>Die P. arbeiten nicht am gleichen Ort / am gleichen Inhalt.</i>	Schreiben // Verifikation

13:45 - 14:39 14:39 - 14:59	D. formuliert die Erklärung. „Trapez, Rechteck und Parallelenviereck können nicht mit <u>gespiegelten</u> Dreiecken gebildet werden.“ V. ergänzt <u>gespiegelte</u>. D. „Das könnte man aus Vierecken machen, dass könnte man aus Dreiecken machen. Aber dann müsste man.... Punktspiegeln. Und hier auch mit vier.“		Schreiben // Verifikation
15:02	VL betritt Raum.		

Besprechung:

V: erklärt: „Man kann das Quadrat aus der Spiegelung machen. Einfach mit zwei rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck. Also mit einem - einfach gespiegelt. Die Seiten sind parallel zueinander.“

D.: „Der Rhombus kann aus zwei gleichschenkligen Dreiecken gebildet werden, jedoch nicht aus rechtwinkligen. Die Seiten sind parallel zueinander und gleichseitig.“

VL: „Gibt es noch mehr, die gehen?“

V: „Das Drachenviereck geht auch. Sie sind gleichschenklige und rechtwinklig. Hä?“

D: „Rechtwinklig kann es sein, muss aber nicht. Also der. Das Dreieck. Das Dreieck kann auch rechtwinklig sein.“

V: „Es kann stumpf sein oder auf dem Kopf stehen. Und die Diagonalen e und f kreuzen sich mit einem rechten Winkel.“

VL: „Welche gehen nicht?“

D: „Trapez, Rechteck, Parallelenviereck. Weil sie nicht mit Dreiecken gespiegelt werden können.“

VL: „Und das ging oben?“

D: „Ja.“

V: „Man kann es nicht mit dem Spiegeln und einem Dreieck machen. Es geht nur mit dem Drehpunkt. Punktspiegelung oder ja....“

VL: „Was stellt denn dieser rote Strich in der Zeichnung dar?“

D: „Spiegelachse.“

Bemerkungen zur Auswertung der Aufgabe:

1. Die P. haben zwar angegeben, welche Vierecksformen mit einem Dreieck und seinem Spiegelbild funktionieren und welche nicht. Sie haben sogar erklärt, mit welcher Abbildungsfunktion (Punktspiegelung) das Rechteck möglich wäre. Ansonsten haben sie eine Begründung ausgelassen.

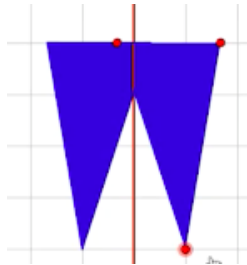
2. Die P. verlieren etwas die Aufgabenstellung aus dem Auge. Sie probieren viel aus und variieren die gefundenen Vierecksformen.

3. Das unter Punkt 2 beschriebene Verhalten wurde durch die dynamische Geometrie begünstigt. Sie nutzten diese, um sich gegenseitig Sachverhalte zu erklären und zu zeigen.

Aufgabe 2, Tandem 5

Solution Summary			
Zeit	Aktivität	Bemerkungen / Zusammenfassung	Phasen
00:00 - 00:10	M: „Also machen wir zuerst das Quadrat.“ N: „Ja, das Parallelenviereck geht nicht.“	spontane Äusserung, dass das Parallelenviereck funktioniert und dass das Quadrat geht	Analyse
00:10 - 00:45	M. versucht, ein Quadrat zu bilden. N: „Das Quadrat funktioniert sicher!“ Die P. diskutieren, wie sie das Quadrat am besten erstellen können. Die P. erzeugen über mehrere Teilschritte das Quadrat.	Erzeugung des Quadrates durch Verändern und beobachten, was passiert	Erkunden
00:45 - 01:00	N: „Soll ich?“ N. zeichnet das Quadrat ein. „Wie haben wir das dort?“ M: „Vier hoch und vier breit.“		Schreiben
01:00 - 01:15	M: „Ich glaube einfach, es funktionieren die, bei denen die vier Seiten gleich lang sind.“ N: „Es funktionieren einfach die, die Achsen - Spiegelachsen haben.“		Schreiben // Analyse
01:15 - 02:10	M: „Das Parallelenviereck hat gar keine, oder?“ N: „Nein - oder doch? Ahm - nein, es hat keine. Darum geht es eben nicht.“	„Rezept“ (Symmetrieachsen vorhanden oder nicht) haben sie bereits entwickelt; nun wenden sie dieses auf das Parallelenviereck an.	Exploration // Schreiben
	M: „Das Drachenviereck geht auch.“ N: „Ja, das ist einfach.“ M. stellt verschiedene Drachenvierecke her. N. zeichnet das Drachenviereck.	Die P. bemerken sofort, dass der Drachen geht. → Vorteil der dynamischen Geometrie, kann schnell verschiedene Drachen erzeugen, bleibt nicht nur bei einem Standardmodell.	

02:10 - 02:40	N: „Funktioniert das Trapez? Nein es funktioniert nicht.“ M: „Nein das Trapez geht nicht. Wobei doch - es hat ja eine Spiegelachse!“ N: „Aber nur das gleichschenklige.“ M: „Ja aber das hat eine.“ N: „Es funktioniert aber nicht.“ M: „Nein. Schau, wenn ich das da raus ziehe, geht es weg. Es geht nicht.“ N: „Warum nicht?“	Ihr „Plan“ über die Symmetrieachsen zu argumentieren, funktioniert nicht mehr. Sie brauchen eine neue „Bedingung“ → Ansatz (Spiegelachse als einzige Bedingung) reicht nicht aus	Verifikation // Schreiben
02:45 - 03:50	M: „Das Rechteck müssten wir jetzt.“ M. zieht an den Ecken des Dreiecks. M: „Das Rechteck geht auch nicht. Hm... auf eine andere Art...“ N: „Doch, es geht! Du musst es so wie das Quadrat machen.“ M. probiert. „Nein, wie haben wir das Quadrat gemacht?“ N. erklärt, wie sie das Quadrat gemacht haben. M: „Jetzt stimmt's. Aber das Rechteck kann man nicht machen.“ N: „Doch es geht.“ M: „Wie?“	N. verbalisiert einen Plan: Sie wollen das Rechteck herstellen wie das Quadrat.	Planung / Ausführung
03:50 - 04:35	N: „Mach dies eines rauf, dies eines rüber, das eines runter... Ah nein... Ah ein Rhombus!“ M: „Ein Rhombus geht.“ N: „Jetzt müssen wir nur noch herausfinden wie...“	Die P. versuchen noch immer, das Rechteck zu erstellen. Per Zufall finden sie dabei den Rhombus. → Die dynamische Komponente ermöglicht hier diese Entdeckung.	Erkunden // Schreiben



	N: „Rhombus geht, Quadrat geht, Drachenviereck geht.... Das sind die einzigen drei, die gehen.“ M: „Die anderen können gar nicht gehen, weil du müsstest sie ja unten auseinanderziehen. Irgendwie.“ N. schreibt auf. „Überleg' mal, weshalb es nicht geht.“	Feststellung; sie konnten alle drei Figuren bereits erstellen und (noch nicht vollständig differenziert) begründen	
04:35 - 05:45	M: „Ja ich glaube, weil wenn du bei diesen Spiegelachsen.... Hier - da gibt es kein Dreieck. Da gibt es ein Viereck!“ M: „Und beim Parallelenviereck... Da gibt es ja eh keine Spiegelachse. Ah doch - diese hier.“ M: „Also wenn du hier die Spiegelachse einzeichnest, sind es zwei Dreiecke. Hier auch. Und wenn du hier eine einzeichnest - das ist ja keine Spiegelachse (man kann dort das Viereck in zwei Dreiecke unterteilen). Und das hier sind zwei Vierecke. Und das Parallelenviereck hat gar keine Spiegelachse.“ N: „Es hat keine.“ M: „Also ich glaube, es kommt auf die Spiegelachsen an. Weil das hier (deutet auf Screen, dort ist noch das Quadrat eingezeichnet) ist eine Spiegelachse.“ N: „Es kommt aber nicht darauf an, ob es eine hat oder nicht, sondern ob es dann eine gibt.“ M: „Aber wenn es kein hat, gibt es sowieso keine gleichen (Figuren).“	<i>Die P. zeigen sich ihre Überlegungen mit Gesten auf dem Theorieblatt.</i>	Verifikation

05:35 - 12:00	N: „Was sollen wir nun schreiben? Das Quadrat hat eine Spiegelachse....“ M: „Ist noch schwierig.“ N: „Oder warte, wollen wir hier eine grundlegende (Erklärung) für alle schreiben?“ M: „Ja.“ M: „Schreiben wir hier einfach für alle.“ N. schreibt Erklärung auf. M. hilft bei der Formulierung. <i>„Wenn man das Quadrat, den Drachen oder den Rhombus durch die Spiegelachse in 2 Hälften teilt, entstehen 2 Dreiecke. Deshalb kann man sie in der Übung auf dem Computer bilden.“</i> N: „Bei den restlichen...“ N. notiert, weshalb die restlichen nicht gehen. M. hilft bei der Formulierung. <i>„Bei den restlichen drei Vierecken (Trapez, Rechteck, Parallelenviereck) geht das nicht, weil wenn man sie durch die Spiegelachse in 2 Teile trennt, entstehen Vierecksformen und nicht Dreiecke.“</i>	<i>Die P.s arbeiten inhaltlich nicht weiter. Sie formulieren gemeinsam die Erklärungen und Begründungen.</i>	Schreiben
12:00 - 13:58	M: „Jetzt sind wir fertig.“ Lesen nochmals kurz den Auftrag oben auf der Seite des Applets. N. macht die Aussage, dass aus jedem Dreieck, das gespiegelt wird, ein Viereck entsteht. Die P. verwerfen die Überlegung wider. Die P. lesen zum Abschluss nochmals die Fragestellung und holen dann die VL.	<i>Sind sich nicht ganz einig und sicher, ob eine nach innen gerichtete Ecke auch als Ecke gilt.</i> <i>Bewerten die Aufgabe als gelöst, nachdem abschliessenden Lesen des Auftrages.</i> <i>+ Lesen (13:09 - 13:38)</i>	Erkunden
Besprechung: M: „Drache, Quadrat und Rhombus gehen. Die anderen drei (Trapez, Rechteck und Parallelenviereck) gehen nicht. VL fragt nach der Begründung. N: „Wenn man Quadrat, Drachen und Rhombus an der Spiegelachsen trennt, gibt es Dreiecke. Bei den anderen gibt es Vierecke. Dann geht es halt nicht. Weil es keine Dreiecke sind.“ VL fragt nach Spiegelachsen bei den anderen Figuren. M: „Das Parallelenviereck nicht, aber die anderen zwei schon.“			

Bemerkungen zur Auswertung der Aufgabe:

1. Die P. haben einen korrekten Ansatz. Sie formulieren eine allgemeine und klare Begründung.
2. Die finale Begründung hat sich während dem Problemlöseprozess entwickelt. Ihre erste Idee, dass diejenigen Figuren mit einer Symmetrieachse möglich sind, haben sich immer wieder überprüft und schliesslich weiterentwickelt.

ANHANG B

Aufgabe 1, Tandem 1

Das drehende Quadrat (Aufgabe 1)

Name: [REDACTED]

Mit dem roten Punkt F kannst du das Quadrat drehen.

①

Aufgabe

Die beiden unten abgebildeten Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.

Untersuche die Grösse der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! Begründe deine Entdeckungen.

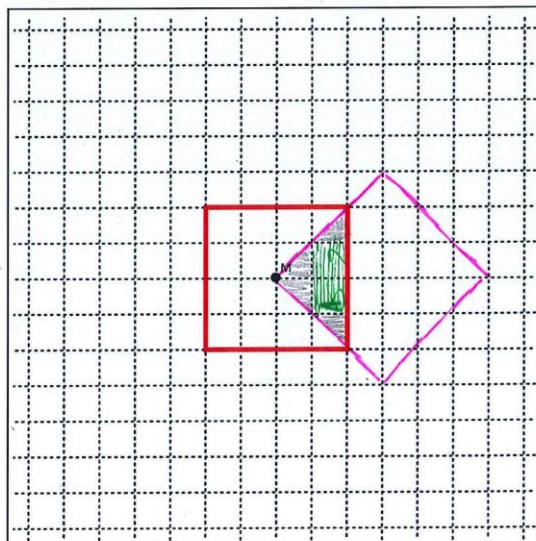
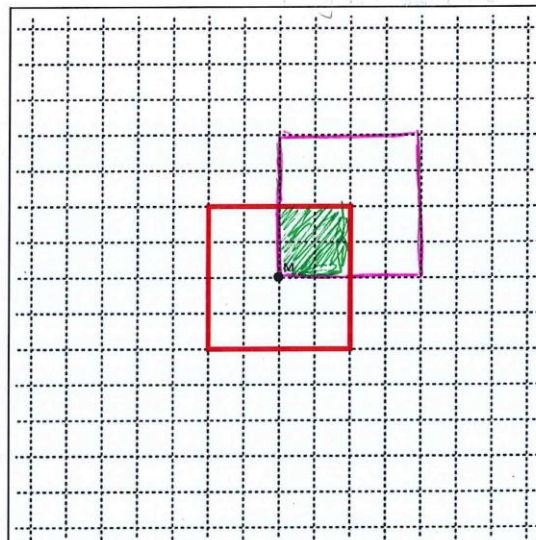
Hier kannst du deine Entdeckungen notieren:

Hier kannst du Skizzen machen:

Die beiden Bier decker
überschneiden sich immer um
 $\frac{1}{4}$ ihrer Gesamtfläche.
egal wie es werden immer
4 Quadrate ausgefüllt

Hier werden 4 ganze Quadrate
ausgefüllt

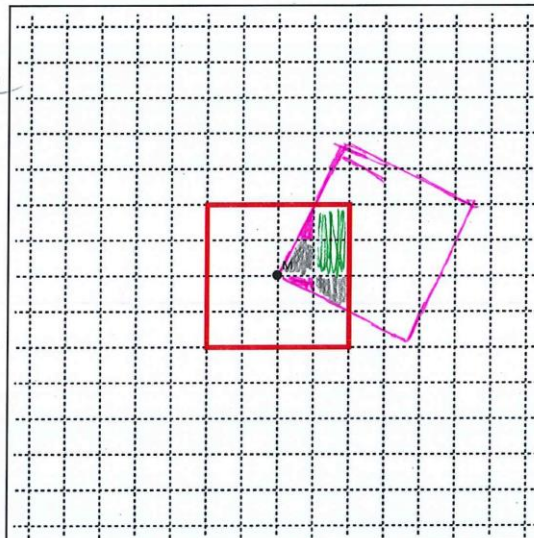
Hier werden 2 Ganze und
4 halbe ausgefüllt
4 halbe $\rightarrow$ 2 Ganze = 4 ganze



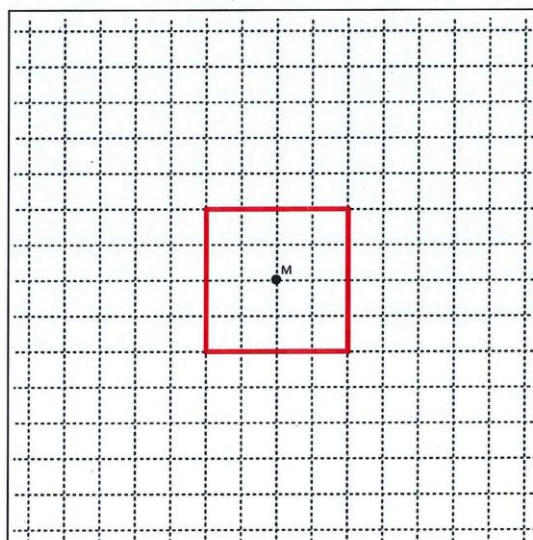
2 ganze + $\frac{3}{4}$ zweimal
 + $\frac{1}{4}$ zweimal = 4 Quadrate

8

$2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$



~~8~~



Aufgabe 1, Tandem 4

Das drehende Quadrat (Aufgabe 1)

Name: [REDACTED]

Mit dem roten Punkt F kannst du das Quadrat drehen.

Aufgabe

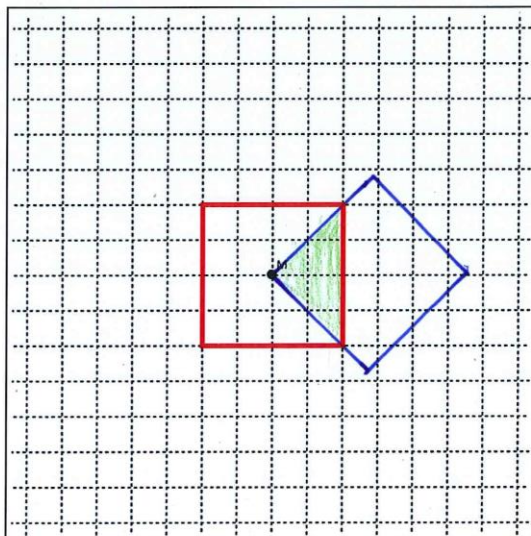
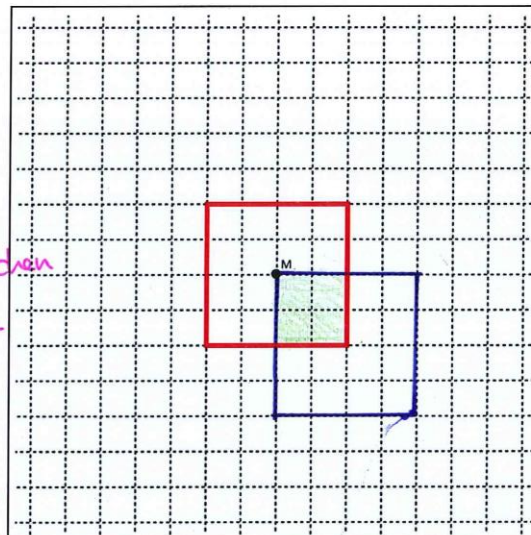
Die beiden unten abgebildeten Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.

Untersuche die Grösse der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! Begründe deine Entdeckungen.

Hier kannst du deine Entdeckungen notieren:

Hier kannst du Skizzen machen:

- Das grüne Feld ist immer $\frac{1}{4}$ eines/der Karte
- Der Punkt F /x Linie MF = 4 Häuschen
- Die Eck-Punkte des beweglichen Bierdeckels bewegen sich kreisförmig um den Mittelpunkt M
- Die grüne Fläche kann ein gleichschenkeliges, rechtwinkliges Dreieck sein, ein Quadrat oder ein unbestimmtes Viereck sein.



Aufgabe 1, Tandem 5

Das drehende Quadrat (Aufgabe 1)

Name: [REDACTED]

Mit dem roten Punkt F kannst du das Quadrat drehen.

Aufgabe

Die beiden unten abgebildeten Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.

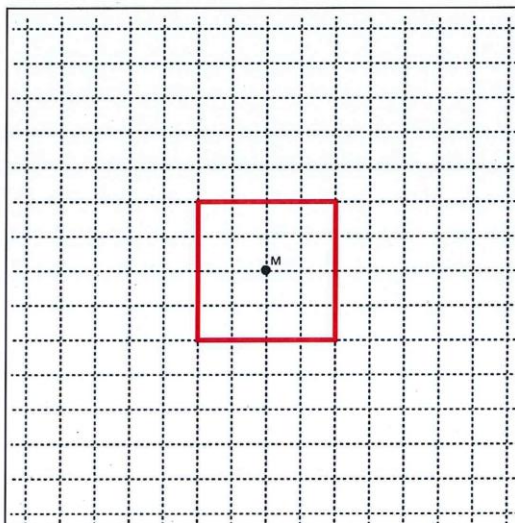
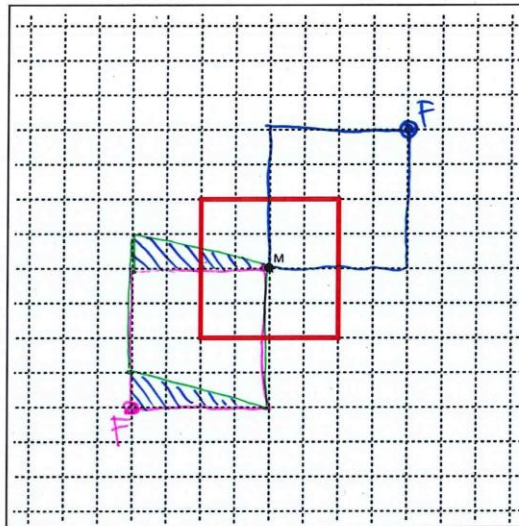
Untersuche die Grösse der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! Begründe deine Entdeckungen.

Hier kannst du deine Entdeckungen notieren:

Hier kannst du Skizzen machen:

Das grüne Feld ist immer gleich gross. Wenn man den Punkt F bewegt nimmt das grüne Feld auf der einen Seite zu und auf der anderen ab. Wenn der Punkt M nicht in der Mitte wäre, wäre die

grüne Fläche beim drehen unterschiedlich gross.



Aufgabe 2, Tandem 1

Vierecke aus zwei Dreiecken (Aufgabe 2)Namen: XXXXXXXXXX

Mit den drei roten Punkten kannst du die Form des Dreiecks ändern.

Aufgabe

Ein Dreieck und sein Spiegelbild sind gegeben. Die Dreiecke sollen so platziert werden, dass sie gemeinsam ein Viereck bilden.

Kannst du mit den beiden Dreiecken diese Vierecksformen bilden: Quadrat, Rechteck, Rhombus, Parallelogramm, Drachenviereck, Trapez? Begründe, wieso die Vierecksform gebildet oder nicht gebildet werden kann.

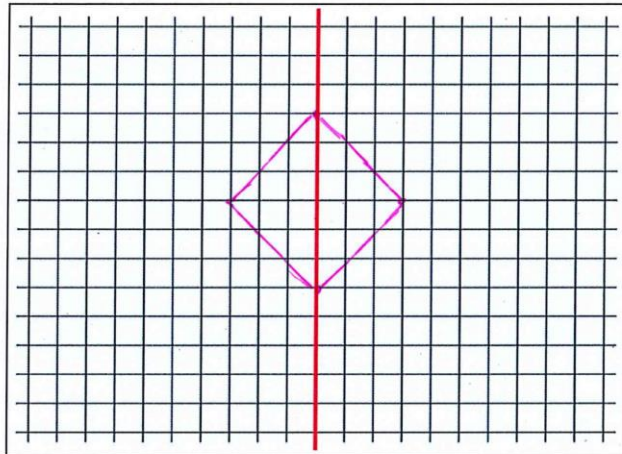
→ Auf dem Beiblatt siehst du eine Übersicht über die genannten Vierecksformen.

Hier kannst du deine Entdeckungen notieren:

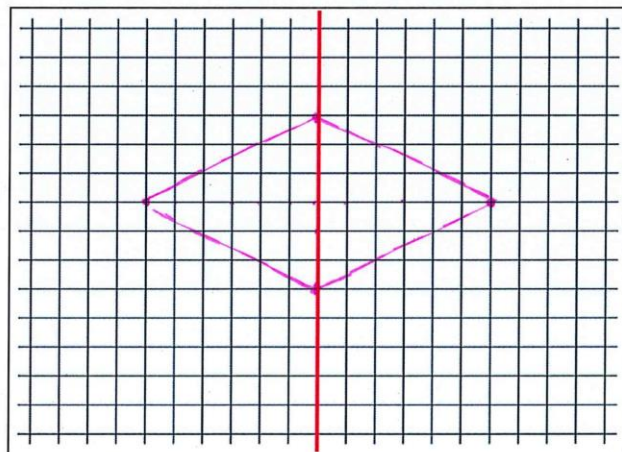
Hier kannst du Skizzen machen:

Quadrat:

Es besteht aus
2 gleichschenkelig-
rechtwinkligen
Dreiecken.

Rhombus:

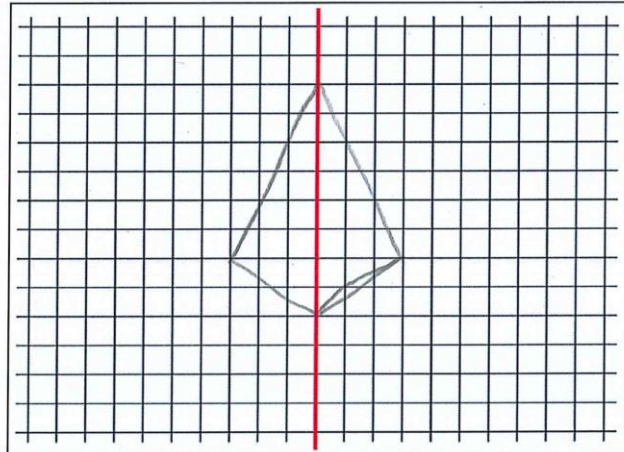
kann aus allen
gleichschenkligen
Dreiecken bestehen
dann wenn die zwei
^{kurzen}
~~restlichen~~ Seiten
der Dreiecke auf
der Spiegelachse
liegen sind die anderen



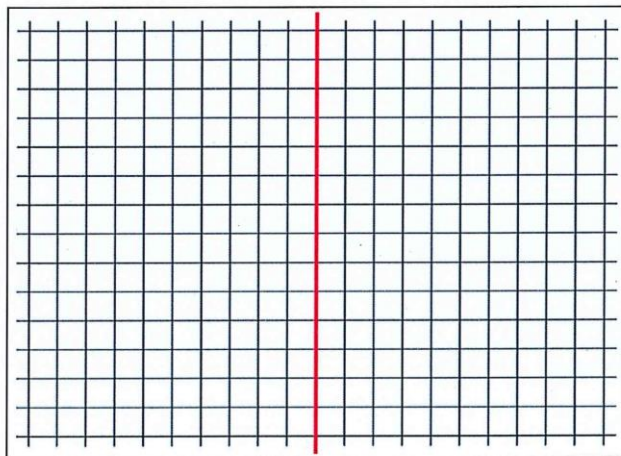
Seiten alle gleich lang. → Rhombus

Drachen:

Es kann aus allen
Dreiecken bestehen sofern
sie nicht gleichseitig oder
gleichschenkelig sind.



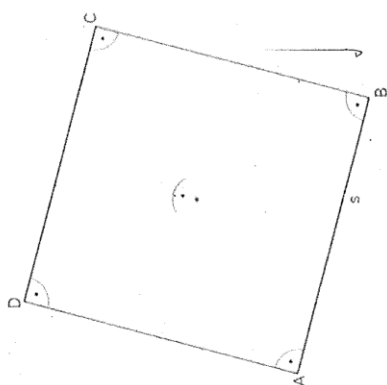
Es klappt bei allen
Vierecken die Achsensymmetrisch
sind und auf beiden Seiten
gleich aussehen, eine Ausnahme
ist das Trapez weil
es nicht aus zwei
gleich-flächigen
Dreiecken besteht!



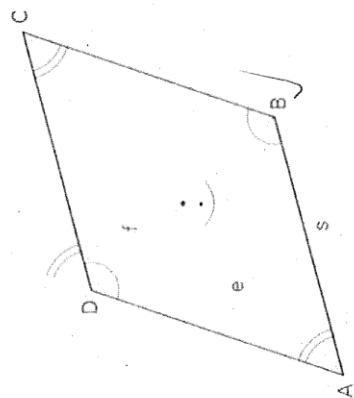
Das Rechteck
wäre mit 2 Symmetrie-
achsen Möglich

Vielfalt der Vierecksformen

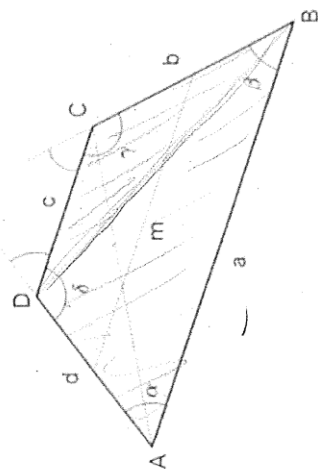
Das Quadrat



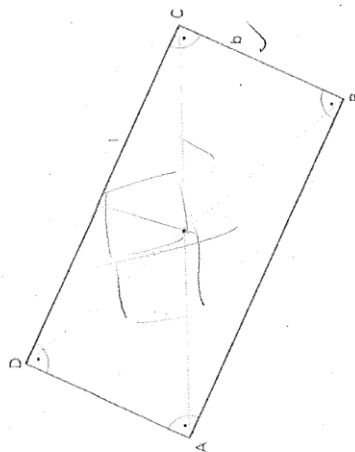
Der Rhombus



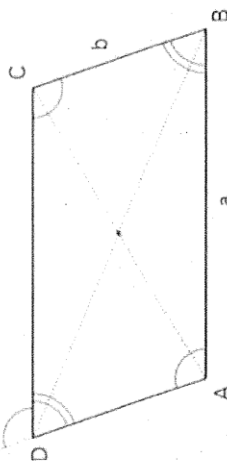
Das Trapez



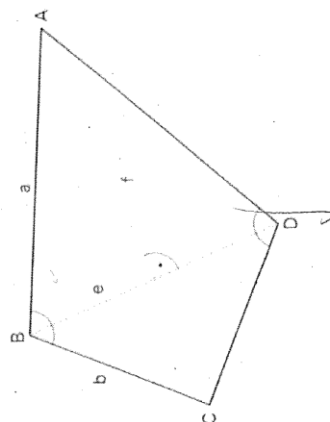
Das Rechteck



Das Parallelenviereck



Das Drachenviereck



Aufgabe 2, Tandem 4

Vierecke aus zwei Dreiecken (Aufgabe 2)Namen: XXXXXXXXXX

Mit den drei roten Punkten kannst du die Form des Dreiecks ändern.

Aufgabe

Ein Dreieck und sein Spiegelbild sind gegeben. Die Dreiecke sollen so platziert werden, dass sie gemeinsam ein Viereck bilden.

Kannst du mit den beiden Dreiecken diese Vierecksformen bilden: Quadrat, Rechteck, Rhombus, Parallelenviereck, Drachenviereck, Trapez? Begründe, wieso die Vierecksform gebildet oder nicht gebildet werden kann.

→ Auf dem Beiblatt siehst du eine Übersicht über die genannten Vierecksformen.

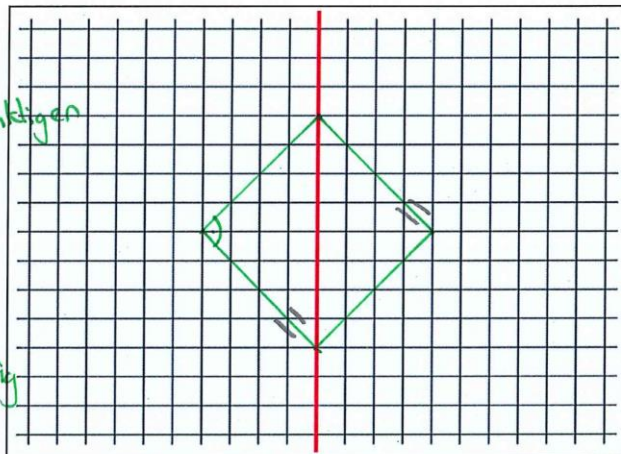
Hier kannst du deine Entdeckungen notieren:

Hier kannst du Skizzen machen:

Quadrat:

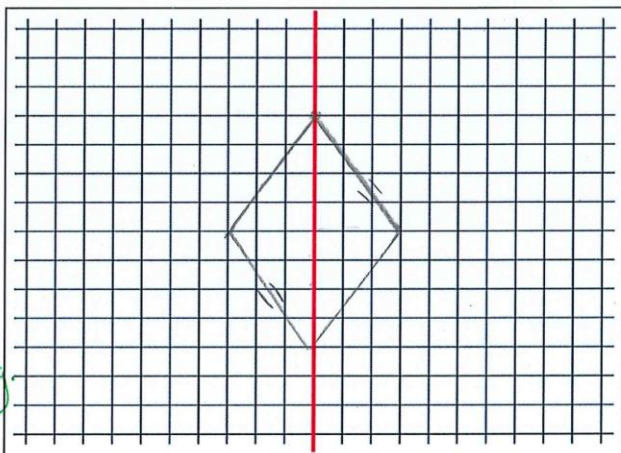
Kann aus zwei
rechtwinkligen, gleichschenkligen
Dreiecken gebildet
werden.

Die Seiten sind
parallel und gleichseitig

Rhombus:

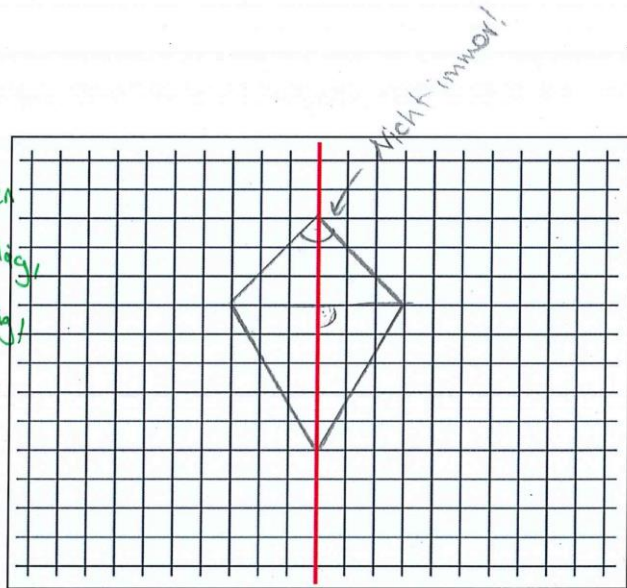
Kann ebenfalls
aus zwei gleichschenkligen
Dreiecken gebildet
werden.

Die Seiten sind
parallel und gleichseitig

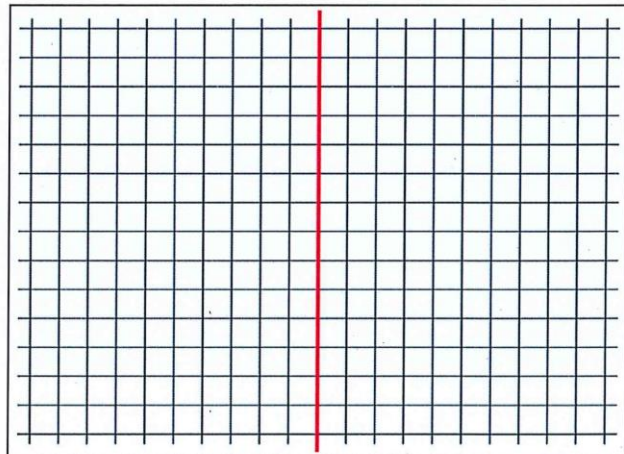


Drachenviereck:

Die Dreiecke können
gleichschenkelig, rechtwinklig,
stumpf- oder spitzwinklig
sein. Die Diagonalen
e und f kreuzen
sich rechtwinklig



Trapez, Rechteck
und Parallelenviereck
können nicht mit
gespiegelten Dreiecken gebildet
werden.



Aufgabe 2, Tandem 5

Vierecke aus zwei Dreiecken (Aufgabe 2)Namen: [REDACTED]

Mit den drei roten Punkten kannst du die Form des Dreiecks ändern.

Aufgabe

Ein Dreieck und sein Spiegelbild sind gegeben. Die Dreiecke sollen so platziert werden, dass sie gemeinsam ein Viereck bilden.

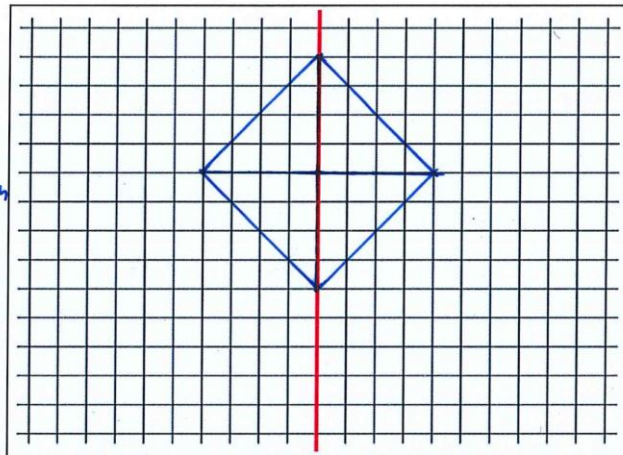
Kannst du mit den beiden Dreiecken diese Vierecksformen bilden: Quadrat, Rechteck, Rhombus, Parallelenviereck, Drachenviereck, Trapez? Begründe, wieso die Vierecksform gebildet oder nicht gebildet werden kann.

→ Auf dem Beiblatt siehst du eine Übersicht über die genannten Vierecksformen.

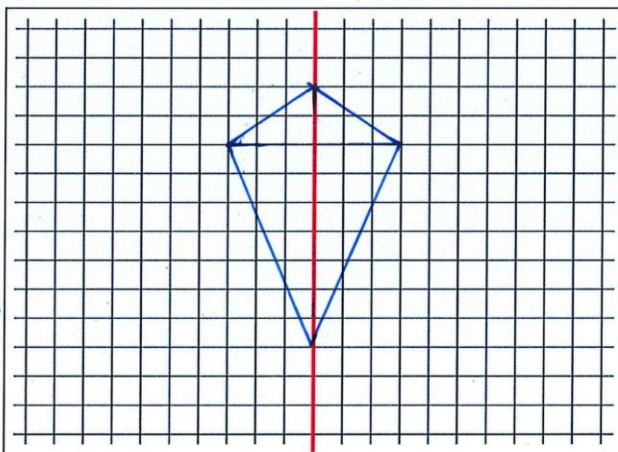
Hier kannst du deine Entdeckungen notieren:

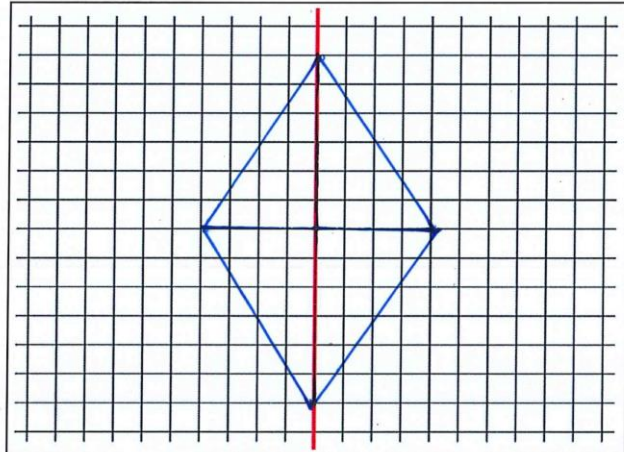
das
Wenn man ~~kein~~ Quadrat,
oder den
den Drachen, Rhombus
durch die Spiegelachse
in 2 Hälften teilt entstehen
2 dreieck des halb
kann man sie in
der Übung auf dem
Computer bilden.

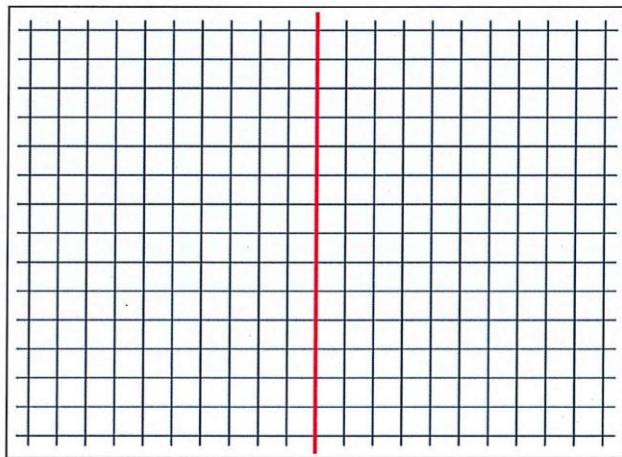
Hier kannst du Skizzen machen:



Beim Bei der restlichen
3 vierecken (Trapez, re-
chteck, Parallelenviereck)
geht das nicht,
weil wenn man sie
durch die Spiegelachse
in 2 teile trennt
entstehen vierecks-
formen und nicht dreieck-
dreiecke.







ANHANG C

Codiermanual: Phasenmodell

Präzisierungen zum Codiermanual nach Schoenfeld (1992, zit. nach Rott 2013, Anhang 3)

Folgende Bemerkungen fügt Rott (2013) seinem Codiermanual hinzu:

- **Episode** ist eine Zeitspanne, in der bestimmte Aktivitäten ausgeführt werden → „konsistentes Verhalten“ (vgl. Schoenfeld 1992)
- **Beginn des Problembearbeitungsprozesses:** Der Moment, wenn die Probanden Aufgabe bewusst wahrnehmen (z.B. Aufgabenblatt aufschlagen, ausgehändigt bekommen, Instruktionen LP) → Oft beginnt ein Problembearbeitungsprozess mit dem Lesen der Aufgabenstellung
- **Ende des Problembearbeitungsprozesses:** Der Moment, wenn die Probanden sich darüber einig sind, dass sie das Problem gelöst haben, aufgaben oder der Prozess von der LP abgebrochen wird
- **Problem bei Rott:** Nach einer Äusserung „wir sind fertig“ kann die VL intervenieren und somit den Bearbeitungsprozess beeinflussen, wenn die Probanden anschliessend nochmals weiterarbeiten. Bei uns könnte dieses Problem bei der Präsentation der Ergebnisse vorkommen. Es muss bei der Analyse der Ergebnispräsentationen darauf geachtet werden, ob die VL bloss nachfrage (Anregung zum Explizieren) oder ob inhaltlich interveniert wird.
- **Vorgehen von Rott:** Vor dem Codieren fertigt er eine „Solution Summary“ an (Irrwege und Wege der Tandems werden festgehalten, eine grobe Zusammenfassung verfasst). Anschliessend wird eine grobe Einteilung in Phasen / Episoden vorgenommen. Erst dann soll das Codieren mit dem Annotationsprogramm erfolgen.
- **Event sampling:** Die Einteilung wird in unterschiedlich grosse Zeitabschnitten vorgenommen. Es wird nach *Episoden* (konsistenter Handlungen) codiert.
- **Transitionen** sind kurze Episoden zwischen zwei ausdrücklichen Phasen, die keiner der Phasen zugeordnet werden kann. Diese Transitionen sind meist ziemlich kurz.
- **Hinweis:** Es gibt keine Mindestlängen für das Codieren von verschiedenen Phasen. Rott weist aber darauf hin, dass es sich beim Verfahren um ein makroskopisches Schema handelt (*grobe* Einteilung). Wichtig sei, dass der Gesamtprozess immer im Auge behalten würde (Beispiel: Mehrere kurze Phasen mit Aktivitätswechsel - z.B. mehrfach Skizze → Messung → Berechnung - gehören meistens zu *einer* Episode). Nur, wenn sich die Tätigkeiten gleicher nacheinander folgender Phasen *deutlich* unterscheiden, werden zwei Episoden gleich codiert (der gleichen Phase / Episode zugeordnet).

- **Partnerarbeit:** Es soll darauf geachtet werden, ob die Probanden sich tatsächlich immer in denselben Phasen befinden (z.B. wenn einer schneller ist oder eine Aufgabenteilung vorkommt). Wenn beide Probanden innerhalb 10s befinden (Rott verweist auf die Möglichkeit der Reduktion dieser Zeitspanne auf 5s) wird gemeinsam codiert. Es muss jedoch abgemacht werden, zu welchem Zeitpunkt eine Phase beginnt und endet (beim schnelleren / langsameren Probanden). Rott tendiert dazu, dass die zeitlichen Begrenzungen der Episoden nach dem schnelleren Probanden vorgenommen werden soll.

Nachfolgend fassen wir die Einteilung der Bearbeitungsprozesse nach Rott (2013) in für uns geeigneter Form zusammen, ergänzen diese und passen sie auf unsere Aufgaben bezogen an. Welche Tätigkeiten bei den einzelnen Aufgaben welcher Phase zugeordnet werden, wird im Methodenteil bei der entsprechenden stoffdidaktischen Analyse beschrieben.

Phase	Indikatoren	Bemerkungen
Lesen = Lesen der Aufgabenstellung	Lesen des Aufgabentextes Stille und kurze Wortwechsel danach über die Aufgabenformulierung oder einzelne (nicht mathematische) Begriffe oder Abkürzungen	In dieser Phase können auch Fragen gestellt werden; z.B. wenn sie sich auf die Aufnahmesituation, das Aufgabenblatt oder einzelne Wörter / Abkürzungen beziehen. Es beginnt neue Episode, wenn die P. versuchen, die Aufgabe zu <i>verstehen</i> , <i>mögliche Lösungen diskutieren</i> , <i>Vermutungen anstellen</i> . Anzeichen für Episodenwechsel sind folgende: Skizzen anfertigen, Messen, Rechnen. Bei der dynamischen Aufgabe deutet die Manipulation des Applets auf einen Episodenwechsel hin. Wenn die Aufgabenstellung mitten im Bearbeitungsprozess erneut durchgelesen wird, wird nur eine eigene Episode codiert, wenn es sich tatsächlich um eine eigene Phase handelt (z.B. wenn die Aufgabe aus mehreren Teilaufgaben besteht). Ein kurzer Blick auf die Aufgabenstellung („müssen wir das berechnen oder auch begründen?“) wird nicht als eigene Episode codiert. Ein Vermerk als Notiz scheint hier aber für die Auswertung sinnvoll.
Analyse = Verstehen der Situation	„ Aufgabenstellung durchdringen wollen“ Vereinfachen / Umformulieren / Beispiele machen / Skizzen anfertigen „Aufgaben betreffende Automatismen“ → spontane Zusammenhänge oder mögliche Vorgehensweisen (z.B. Fläche berechnen) → ist, wenn eine Aussage sehr schnell nach dem Lesen auftritt, meist eine Phase der Analyse (und nicht Plan) Vermutungen aufstellen, spontane Äusserung zur Lösung	Die Unterscheidung zwischen Erkundung und Analyse liegt in der Struktur und dem Inhalt: Bei der Analyse arbeiten die P. sehr <i>nahe am Aufgabentext</i> und gehen eher <i>strukturiert</i> vor.

Exploration = Generieren von Ideen, Erarbeitung von Lösungsansätzen	weite Suche im Problemraum chaotisch und weiter weg vom Problem als bei der Analyse Ideen suchen, verschiedene Ansätze, die eher entfernt mit der Aufgabe zu tun haben, ausprobieren Einsatz von Heuristiken ! (z.B. Hilfslinien einzeichnen, Spezialfälle betrachten, ...)	Das Betrachten eines Spezialfalls (bei Quadrataufgabe zu erwarten) gehört zur Exploration (heuristische Strategie). Die Erweiterung oder das Abändern der Aufgabenstellung <i>während</i> dem Problembearbeitungsprozess (wenn noch keine Ergebnisse vorliegen) wird auch als Exploration codiert.
Planen = Aufstellen eines Plans	einen (erfolgsversprechenden) Plan aufstellen	Es sind meist kurze Phasen. Sie lassen sich oft nicht von Ausführung trennen; dann doppelt codieren → Planung-Ausführung . Bei der Phase „Planen“ müssen sich die P. über ihren Plan austauschen .
Implementation / Ausführung = Abarbeiten des Plans	Ausführung eines Plans Kontrollen und Evaluationen des Rechenwegs	Die Phasen lassen sich oft nicht von Ausführung trennen → dann doppelt codieren → Planung-Ausführung . Es kann auch vorkommen, dass eine Ausführung codiert wird, ohne dass zuvor explizit ein Plan aufgestellt wurde (z.B. wenn Vorgehen klar ist.)
Planung / Ausführung	strukturiertes, zielgerichtetes Vorgehen explizit geäußelter Plan für eine Tätigkeit oder aber implizit / Andeutungen vorhanden	Bei der ersten Durchschau der Daten haben wir uns entschieden, Planung und Ausführung <i>immer</i> doppelt zu codieren, da kaum ein Plan explizit geäußert wurde. Pläne, die auf einem übergeordneten Niveau der Aufgabenstellung sind (z.B. „machen wir zuerst diejenigen, die funktionieren“ oder „versuchen wir es damit“), werden nicht zwingendmassen als Planung / Ausführung codiert. Die einzelnen Tätigkeiten und die darauf bezogenen Äusserungen sind für die Codierung als Planung / Ausführung entscheidend.

Verifikation = Überprüfen des Ansatzes, Rückschau halten	Versuch, die Ergebnisse zu überprüfen (Absicht muss verdeutlicht werden) Reflexion des Prozessverlaufs Plausibilitätskontrollen eines (fertigen) Ergebnisses	Verifikation kann nur stattfinden, wenn eine Lösung gefunden wurde oder (Teil-) Ergebnisse erzielt wurden Der Prozess wird vorläufig beendet. Die Unterscheidung zwischen Kontrolle (Begründung finden, jeden Schritt kontrollieren können) und Reflexion (Ergebnis für andere Aufgaben brauchbar? Gibt es alternative Lösungswege?) ist für Auswertung wichtig (beide werden als Verifikation codiert). Deshalb wird diese Unterscheidung im Annotationsprogramm festgehalten.
Schreiben = Aufschreiben von Antwortsätzen und schriftliches Zusammenfassen	schriftliches Festhalten von bisherigen Erkenntnissen Formulieren eines (vorläufigen) Antwortsatzes Anfertigen von Skizzen auf dem Dokumentationsblatt	Diese Phase wird nur codiert, wenn inhaltlich <i>nicht</i> weitergearbeitet wird (also wenn keine andere Phase vorliegt). Es kann jedoch sein, dass doppelt codiert wird (Schreiben und andere Phase). Dies ist der Fall, wenn die P. nicht dieselben Tätigkeiten vornehmen. Die Phase beginnt, wenn ein P. tatsächlich mit der Formulierung eines (Teil-)Antwortsatzes beginnt (nicht bei der Ankündigung).
Abschweifung = aufgabenferne Tätigkeiten	Tätigkeiten die offensichtlich nichts mit der Aufgabe zu tun haben	Wenn zwei S. sich zwar über etwas Aufgabenfermes unterhalten, wählrenddessen aber weiterarbeiten (z.B. skizzieren, rechnen), wird die entsprechende Episode (z.B. Ausführung / Exploration) codiert. Diese Phase kann als „Inkubation“ hilfreich für den Problemlöseprozess sein.
Organisation = Phasen, in denen aufgabenbezogen, aber nicht inhaltlich gearbeitet wird (z.B. Tabelle anfertigen)	Episoden, in denen Tätigkeiten ausgeführt werden, die zwar mit der Bearbeitung der Aufgaben zu tun haben, aber keine <i>inhaltliche</i> Arbeit erkennbar ist	Beispiele: Tabellen anfertigen, Graphen zeichnen Bei unseren Aufgabenstellungen erwarten wir keine organisatorischen Tätigkeiten.

Transitionen = Episoden ohne Zugehörigkeit zwischen zwei Phasen	kurze Episoden zwischen zwei Phasen ohne Zugehörigkeit	
Sonstiges = Phasen, die eigene Episoden bilden, aber keinen anderen Typ zugeordnet werden können	Störung durch die VL	Unterbricht die VL den Problembearbeitungsprozess (durch Betreten des Zimmers / Nachfragen der Zeit), wird <i>Störung</i> codiert.

Codiermanual: Einteilung der dynamischen Geometrie

Fragestellungen:

(II) Ergeben sich durch die Bearbeitung am Computer allenfalls Erweiterungen oder Anpassungen am Phasenmodell von Rott?

(II.1) Zeigen sich unterschiedliche Verwendungen beim Einsatz der dynamischen Geometriesysteme?

(II.2) In welchen Episoden kommen welche Tätigkeiten vor?

Zur Beantwortung der Fragestellungen, müssen verschiedene dynamische Tätigkeiten unterschieden werden. Die folgende Einteilung der Kategorien ist induktiv entstanden und steht in enger Verbindung mit den Aufgaben der vorliegenden Masterarbeit.

Entdeckendes Variieren	<i>Entdeckendes Variieren</i> steht in enger Beziehung zu einem möglichen Erkenntnisgewinn. Die Kategorie umfasst zwei Unterkategorien: • <i>Planvolles Verändern</i>: Beim planvollen Verändern muss eine Absicht, wie die Applet bewegt werden soll (oder weshalb sie so bewegt wurde) vorliegen. Die Probanden müssen diesen „Plan“ äussern. Solche Pläne könnten sein: – „Diese Kriterien muss die Figur erfüllen.“ – Die Probanden bewegen das Applet so, wie sie es bereits einmal gemacht haben, und beobachten genau, wie sich die Figuren verändern. • <i>Ungerichtetes Verändern</i>: Das Applet wird ungerichtet bewegt. Die Probanden suchen ohne bereits vorliegenden Plan nach einem Lösungsansatz. Diese Bewegung hat einen Charakter von „ausprobieren“ oder „prüfen“. Aus ungerichtetem Verändern können „zufällige“ Entdeckungen resultieren.
Spezialfälle / Extremfälle erzeugen	Die Probanden erzeugen Spezialfälle oder Extremfälle. <i>Zufälliges</i> Erzeugen von Spezialfällen oder Extremfällen wird jedoch nicht als „Spezialfälle / Extremfälle“ codiert. Die Probanden müssen eine Absicht hinter der Tätigkeit äussern. Die Kategorie „Spezialfälle / Extremfälle“ erzeugen“ stellt im Erkenntnisgewinn eine heuristische Strategie dar.

Invarianten untersuchen	Figuren werden bezüglich ihrer veränderlichen und unveränderlichen Eigenschaften untersucht. Merkmale werden „ausgelotet“. Es liegt eine „Theorie“ / Vorstellung darüber vor, welche Eigenschaften eine Figur besitzen muss. Diese Vorstellungen müssen codiert werden. Das Applet wird nach diesen geäußerten Vorstellungen verändert. Eine mögliche können sein: „Wenn ich das so verändere, handelt es sich dann noch immer um dieselbe Figur?“ Durch das Untersuchen einer Figur nach ihren Invarianten können auch neue Eigenschaften entdeckt werden. Die Probanden können durch diese dynamische Tätigkeit entdecken, welche Eigenschaften einer Figur veränderlich und welche unveränderlich sind. Es werden Merkmale ausgelotet. „Theorie“ / Vorstellung (welche Eigenschaften es haben muss) liegen vor. Die Applet wird danach verändert.
Darstellung / gegenseitiges Erklären	Das Applet wird zur Illustration verwendet, um einen speziellen Fall für eine anschließende Dokumentation darzustellen. Wird das Applet von den Probanden genutzt, um sich gegenseitig ihre Erkenntnisse zu erklären, wird diese Kategorie (Darstellung / gegenseitiges Erklären) codiert. Bei solchen dynamischen Tätigkeiten soll (im Moment der Durchführung) <i>kein</i> Erkenntnisgewinn im Zentrum stehen. Es ist jedoch denkbar, dass diese Kategorie trotzdem auch in Phasen der Planung / Ausführung oder Exploration anzutreffen ist, da es auch in solchen Phasen Momente gibt, in welchen sich die Probanden ihre Erkenntnisse mitteilen und gegebenenfalls das Applet dazu nutzen.

Bei den Kategorien *entdeckendes Variieren*, *Spezialfälle erzeugen*, und *Invarianten untersuchen* steht ein Erkenntnisgewinn im Vordergrund.

ANHANG D

Checkliste Videoaufnahmen

	Kamera	Instruktion
Vor der Untersuchung	Videokamera → Klappe: Tandem 1, Vorstellung	Ablauf erklären: „Ihr werdet nacheinander zwei Problemlöseaufgaben am Computer lösen.“ - Während dem Problemlösen dokumentiert ihr eure Überlegungen. - Nach beendeter Zeit / Aufgabenbearbeitung stellt ihr uns eure Überlegungen kurz vor.“ „Die Lösung steht nicht im Zentrum unseres Interesses; viel Wichtiger ist euer Lösungsweg und eure Überlegungen.“ „Wenn etwas nicht klar sein sollte, könnt ihr uns holen gehen. Wir warten vor der Türe.“ Ganz zu Beginn: Kurz vor der Kamera vorstellen: Name und Klassenlehrperson. Abgabe der Einverständniserklärung
Vor der ersten Aufgabe	Screen Webcam Videokamera → Klappe: Tandem 1, Aufgabe 1	Dokumentationsblatt austeilen Erklären, wie Figuren bewegt werden können „Für diese Aufgabe stehen ca. zehn Minuten zur Verfügung. Wir werden nach zehn Minuten vorbei kommen - bei Bedarf kann die Zeit noch verlängert werden.“
Nach der Aufgabe	Screen und Webcam aus, Videokamera neu starten → Klappe: Tandem 1, Auswertung Aufgabe 1	- SuS werden gebeten, ihre „Lösung“ / ihren Weg zu erklären. - Bei Bedarf (Unklarheiten) wird nachgefragt - Darauf achten, dass bloss Nachfragen zum Explizieren der Gedanken / Ideen / Erkenntnisse gestellt werden.
Vor der zweiten Aufgabe	Screen Webcam Videokamera → Klappe: Tandem 1, Aufgabe 2	- Aufgabe kurz erklären / vorlesen und zeigen, wie Dreiecke bewegt werden können. - Hinweis auf Theorieblatt → verteilen „Für diese Aufgabe stehen ca. 15 Minuten zur Verfügung - bei Bedarf wird die Zeit verlängert.“
Nach der Aufgabe	Screen und Webcam aus, Videokamera neu starten → Klappe: Tandem 1, Auswertung Aufgabe 2	- SuS werden gebeten, ihre „Lösung“ / ihren Weg zu erklären. - Bei Bedarf (Unklarheiten) wird nachgefragt - Darauf achten, dass bloss Nachfragen zum Explizieren der Gedanken / Ideen / Erkenntnisse gestellt werden.

Urheberschaftsbestätigung

Erklärung

Hiermit erklären wir, dass die vorliegende Arbeit von uns eigenständig verfasst wurde und keine anderen als die von uns angegebenen Hilfsmittel verwendet wurden.

Alle Stellen der Arbeit, die aus anderen Werken oder aus eigenen, von uns bereits einmal als Leistungsnachweis oder Prüfungsarbeit eingereichten Arbeiten dem Wortlaut oder dem Sinn nach übernommen wurden, sind mit Angaben der Quellen als Zitate bzw. Paraphrasen gekennzeichnet.

Wir nehmen zur Kenntnis,

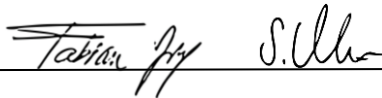
- Dass Arbeiten, die unter Bezug unerlaubter Hilfsmittel entstanden sind, und insbesondere fremde Textteile ohne entsprechenden Herkunftsnachweis enthalten, als „nicht bestanden“ bewertet und ungültig erklärt werden.
- Dass unredliches Verhalten bei Leistungskontrollen und unredliche Verwendung fremder Arbeitsergebnisse ohne Quellenangabe als Disziplinarverstoss gelten und zur Anordnung einer Disziplinar massnahme führen können (vgl. §§ 8 ff. Verordnung zum Fachhochschulgesetz).

Fabian Jany und Sandra Mettler

Name Vorname

Zürich, 19.12.2016

Ort, Datum, Unterschrift



Überprüfung der Arbeit mit einer Plagiatssoftware

Einwilligung

Hiermit erklären wir uns damit einverstanden, dass die vorliegende Arbeit mit einer Plagiatserkennungssoftware überprüft werden darf.

Fabian Jany und Sandra Mettler

Name Vorname

Zürich, 19.12.2016

Ort, Datum, Unterschrift

